

# Segmentation non supervisée d’images par arbres de Markov cachés.

Emmanuel MONFRINI<sup>1</sup>, Thomas LEDRU<sup>2</sup>, Emmanuel VAIE<sup>2</sup>, Wojciech PIECZYNSKI<sup>2</sup>

<sup>1</sup>LSTA Université P. et M. Curie (Paris VI)  
4 place Jussieu, 75005 Paris, France

<sup>2</sup>INT Dpt. SIM  
9 rue C. Fourier, 91000 Evry, France  
emmanuel.monfrini@sim.int-evry.fr, wojciech.pieczynski@int-evry.fr

**Résumé** – Nous étudions la segmentation statistique non supervisée d’images par arbres de Markov cachés avec une atténuation des effets de blocs par l’utilisation de probabilités de transition interéchelle dépendantes de la résolution. Ce modèle est ensuite comparé, sur des exemples, au modèle par champs de Markov.

**Abstract** – We study unsupervised segmentation of synthetical images by using hidden Markov trees. We introduce a new ditree model which may allow one to avoid block effects. We give then examples to compare this model with Markov fields.

## 1 Introduction

La problématique de la segmentation statistique d’images est la suivante : on considère deux champs aléatoires  $X = (X_s)_{s \in S}$  et  $Y = (Y_s)_{s \in S}$  où  $S$  est l’ensemble des pixels.  $X_s$  est à valeurs dans l’ensemble des classes  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$  et  $Y_s$  est à valeurs dans  $\mathbf{R}$ . Il s’agit d’estimer la réalisation invisible  $x$  de  $X$  à partir de l’observation  $Y = y$ . Devant la complexité numérique du problème on est amené à choisir pour  $P_{(X,Y)}$ , la loi de  $(X, Y)$ , des modélisations particulières par champs [7], chaînes [2], ou arbres de Markov cachés [9]. Nous proposons dans ce travail des variantes originales du modèle par arbre et les comparons, dans un cadre simple, au modèle par champs de Markov.

## 2 Modèles sur arbre.

### 2.1 Modèle des classes.

Un graphe  $G = (T, L)$  est formé d’un ensemble  $T$  de sommets, encore appelés noeuds et d’un ensemble  $L \subset T^2$ , d’arêtes (ou arcs) reliant des sommets entre eux. Une suite de sommets  $(t_i)_i$  telle que  $\forall i, (t_i, t_{i+1})$  appartienne à  $L$ , est appelé chemin. Un ensemble  $C \subset T$  sépare deux ensembles  $A, B \subset T$  si il n’existe pas de chemin pour aller de  $A$  à  $B$  sans passer par  $C$ . Soit  $X$  un processus stochastique indexé par les sommets d’un graphe  $G = (T, L)$ .  $X$  est dit markovien sur  $G$  si  $\forall A, B, C \subset T$  tels que  $C$  sépare  $A$  et  $B$ , on a indépendance conditionnelle de  $X_A$  et  $X_B$  sachant  $X_C$ .  $G$  est un graphe de dépendance pour  $X$ . L’arbre est un type de graphe particulier, partitionné en échelles numérotées de 0, pour celle contenant les feuilles, à  $N$ , pour celle contenant l’unique racine [9]. Nous nous intéressons à des arbres ne contenant pas de cycles (chemin dont les sommets sont tous différents exceptés le premier et le der-

nier qui sont égaux), dans lesquels chaque noeud fils a un et un seul noeud père. Le plus connu d’entre eux est le quadarbre (FIG.1). Cependant, la brutalité de la tran-

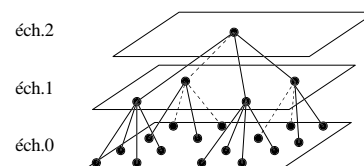


FIG. 1: *Quadarbre. 4 × 4*

sition à quatre fils ne permet pas toujours de mettre en évidence les détails fins des images [9]. L’idée, afin d’éviter les effets de bloc pouvant survenir, est d’adoucir le lien de fraternité. Nous proposons trois variantes de la démarche donnant deux fils à chaque génération. D’abord les fils sont engendrés alternativement dans le sens latéral et dans la profondeur (FIG. 2). Dans un deuxième modèle (FIG.3) la

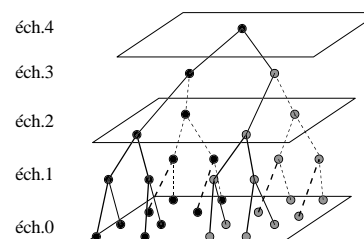


FIG. 2: *Transmission droite.*

transmission se fait une fois sur deux en diagonale et enfin, le lien de fraternité est uniquement diagonal (FIG.4). Il est intéressant de remarquer que ce dernier modèle se

comporte virtuellement comme s'il y avait des classes supplémentaires, comme s'il y avait des endroits de flous dans l'image. C'est particulièrement flagrant sur l'image 4 de la figure 5 qui est une simulation à 3 classes.

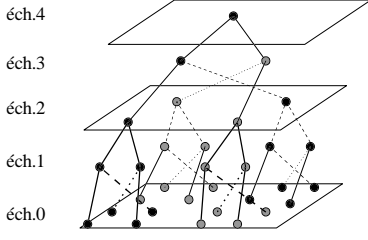


FIG. 3: *Transmission alternée droite-diagonale.*

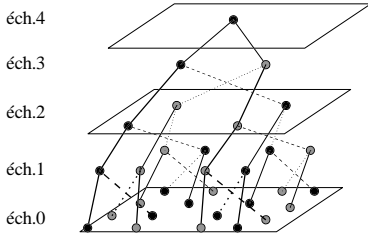


FIG. 4: *Transmission diagonale.*

Un second aspect du modèle classique a été amélioré par l'introduction de probabilités de transition père-fils dépendantes de l'échelle. Nous avons choisi de favoriser de plus en plus la conservation de la «couleur» avec l'affinement de la résolution, pour provoquer l'apparition de zones uniformes similaires à celles constatées dans les champs de Gibbs. Parmi les différentes transitions que nous avons essayées, celle qui donne les résultats les plus proches de ceux escomptés est logarithmique. A l'échelle  $n$ ,  $N$  étant la résolution la plus grande,  $P_{\omega_i/\omega_i}(n)$  étant la probabilité que le père et le fils aient la même couleur  $\omega_i$  et  $P_{\omega_j/\omega_i}(n)$  étant la probabilité que la couleur du fils soit  $\omega_j$  sachant que celle du père est  $\omega_i$ , on pose :

$$P_{\omega_i/\omega_i}(n) = \alpha + \varepsilon + \frac{1 - \varepsilon - \alpha}{\ln(N)} \ln(n)$$

$$P_{\omega_j/\omega_i}(n) = \frac{1 - \alpha - \varepsilon - \frac{1 - \varepsilon - \alpha}{\ln(N)} \ln(n)}{\text{Nbre de classes} - 1}$$

avec  $\alpha$  le paramètre de concentration et  $\varepsilon$  qui évite le déterminisme de la dernière transition. La variable  $\varepsilon$  n'est pas considérée comme un paramètre du modèle, elle est fixée au début de l'étude à 0.001, alors que  $\alpha$ , qui agit sur la taille des zones uniformes de couleur, est un paramètre dépendant de l'image à segmenter.

Des exemples de simulations d'images par ces modèles sont présentés figure 5.

## 2.2 Modèle de Markov caché.

Nous nous intéressons, dans ce travail, aux segmentations monorésolution ; les pixels de l'image correspondent alors aux feuilles de l'arbre. On note  $T$  l'ensemble de tous les sommets et  $T^n$  l'ensemble des sommets de la résolu-

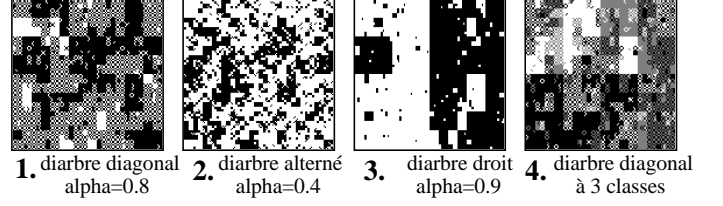


FIG. 5: *Exemple de simulations d'images par diarbre.*

tion  $n$ .  $X = (X_t)_{t \in T}$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\Omega^{|T|}$  et  $Y = (Y_t)_{t \in T^0} = Y^0$  est une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble des observations  $\mathbf{R}^{|T^0|}$ . Nous supposons les propriétés suivantes :

1.  $X$  est markovien en échelle :

$$P[X^n/X^k, N \geq k \geq n+1] = P[X^n/X^{n+1}]$$

où  $X_n = (X_t)_{t \in T^n}$ ,  $N \geq n \geq 0$ ;

2. Les probabilités de transition inter-échelle peuvent se factoriser. Pour  $N-1 \geq n \geq 0$  on a

$$P[X^n/X^{n+1}] = \prod_{t \in T^n} g^n(X_t/X_{t-})$$

où  $X_{t-}$  est le père de  $X_t$ ;

3. L'indépendance conditionnelle des observations par rapport aux classes au niveau de l'image :

$$P[Y^0/X^0] = \prod_{t \in T^0} f^0(Y_t/X_t)$$

L'importance des arbres de Markov cachés vérifiant les trois propriétés ci-dessus vient de la possibilité du calcul analytique de la loi du processus  $X$  conditionnelle à  $Y = y$ . Plus précisément, il est possible de calculer la loi de  $X^N$ , la loi de  $X^{N-1}$  conditionnellement à  $X^N$ , ..., la loi de  $X^0$  conditionnellement à  $X^1$ , ce qui rend possible la simulation de  $X$  selon la loi conditionnelle à  $Y = y$ . On peut donc simuler la loi de  $X^0$  conditionnellement à  $Y = y$  et ses lois marginales. On peut alors utiliser l'algorithme de segmentation MPM [10].

## 2.3 Un algorithme de calcul du MPM sur le diarbre.

On retrouve une passe montante et une passe descendante similaires au calcul des probabilités forward et backward ([1], [2]) bien connues dans le cadre des chaînes de Markov cachées.

- *une passe montante*

–  $n = 0$  : on pose pour tout  $t \in T^0$  :

$$A_0(x_t^0 = \omega_i, x_{t-}^1 = \omega_j) = P(x_t^0 = \omega_i / x_{t-}^1 = \omega_j) f_{(x_t^0 = \omega_i)}(y_t).$$

où  $x_{t-}^1$  est le père de  $x_t^0$  et  $y_t$  est l'observation associée à  $x_t^0$ .

- Pour  $1 \leq n \leq N-1$  :

par récurrence,  $t \in T^n$ ,

$$A_n(x_t^n = \omega_i, x_{t-}^{n+1} = \omega_j) = P(x_t^n = \omega_i / x_{t-}^{n+1} = \omega_j)$$

$$\prod_{t^+ \in T_+^n} \left( \sum_{\omega \in \Omega} (A_{n-1}(x_{t^+}^{n-1} = \omega, x_t^n = \omega_i)) \right)$$

où  $T_+^n$  est l'ensemble des fils de  $x_t^n$ .

–  $n = N$  : calcul de

$$A_N(x_t^N = \omega_i) =$$

$$P(x_t^N = \omega_i) \prod_{t^+ \in T_+^N} \left( \sum_{\omega \in \Omega} (A_{N-1}(x_{t^+}^{N-1} = \omega, x_t^N = \omega_i)) \right)$$

• *une passe descendante*

–  $n = N$  : calcul de la probabilité initiale à posteriori

$$P_N^Y(x_t^N = \omega_i) = \frac{A_N(x_t^N = \omega_i)}{\sum_{\omega \in \Omega} A_N(x_t^N = \omega)}$$

– de  $n = N - 1$  à 0 : simulation de l'arbre à posteriori grâce aux probabilités de transition

$$P_n^Y(x_t^n = \omega_i / x_{t-}^{n+1} = \omega_j) = \frac{A_n(x_t^n = \omega_i, x_{t-}^{n+1} = \omega_j)}{\sum_{\omega \in \Omega} A_n(x_t^n = \omega, x_{t-}^{n+1} = \omega_j)}$$

En effectuant plusieurs simulations, on peut alors estimer les lois marginales de  $X^0$  et effectuer une segmentation (qui est ici l'estimation de  $X^0 = x^0$  à partir de  $Y$ ) par la méthode du MPM. Nous présentons à la figure 6 quelques bruitages et segmentations concernant les images de la figure 5. Les paramètres des bruitages gaussiens et les taux d'erreurs sont présentés dans le tableau 1.

Lorsque les paramètres sont inconnus, on doit les estimer à partir de  $Y = y$  : ce problème est l'objet du paragraphe suivant.

TAB. 1: Segmentations des images de la figure FIG.5 .

Vérité terrain	Bruitage	Erreur
1	N(0,1)-N(1,1)	image 5 : 2.9%
2	N(0,1)-N(2,1)	image 6 : 1.8%
3	N(1,1)-N(1,2)	image 7 : 1.7%
4	N(0,1)-N(1,1)-N(2,1)	image 8 : 4.2%

## 2.4 Estimation des paramètres des modèles cachés

Le problème de l'estimation des paramètres est un problème d'estimation de paramètres dans le cas des données cachées. Plus particulièrement, le processus caché étant à valeurs discrètes, il s'agit de l'estimation d'un mélange fini de lois. Un certain nombre de méthodes générales, comme Expectation-Maximization (EM [6]), Stochastic EM (SEM [4]) ou Iterative Conditional Estimation (ICE [11]), sont applicables aux arbres de Markov cachés.

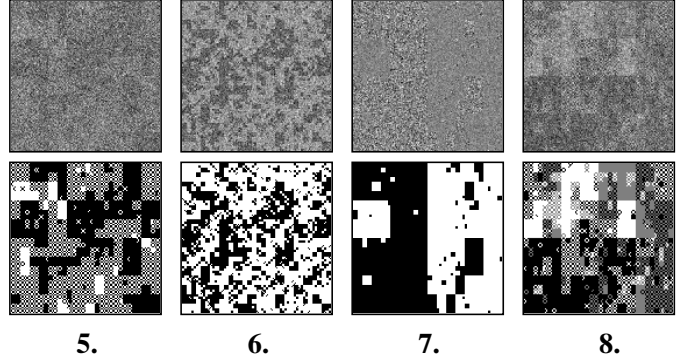


FIG. 6: Segmentation des images de la figure FIG. 5.

La méthode d'estimation choisie pour notre étude est ICE, qui est appliquée à des mélanges de lois de la famille paramétrique issue de la réunion de la famille des lois normales et de la famille des lois exponentielles. Ici, les paramètres de la loi a priori de  $X$  sont la probabilité initiale de la racine et les probabilités de transition père-fils à chaque niveau d'échelle. Ces dernières ne dépendent, dans le modèle simple qui nous intéresse, que de  $\alpha$ , qui est estimé par comptage des apparitions des différents cas, lors des simulations, sur tout l'arbre. Les paramètres des lois du bruit (ici moyennes et variances), qui sont gaussiennes ou exponentielles, sont estimés par les moyennes et variances empiriques.

## 3 Comparaison avec les champs de Markov.

Nous présentons dans cette section divers résultats de simulation. Nous comparons les résultats obtenus par notre méthode aux résultats obtenus par des champs de Markov très simples.

L'efficacité des diarbres en matière de temps calcul est incontestable, et incomparable avec la longueur des temps constatés sur les champs. C'est un facteur important à prendre en compte pour l'étude comparative qui suit. Nous cherchons principalement à comparer les résultats obtenus avec ceux des méthodes par champs de Markov cachés. Nous utilisons la forme la plus simple des champs de Markov et limitons la durée de calcul des segmentations. Celles sur les arbres durent entre 10 et 20 secondes avec des taux d'erreur, pour plusieurs segmentations de la même vérité terrain bruitée de manières équivalentes, variant de  $\pm 1\%$ . Nous utilisons (FIG.7) les trois types d'arbres : **10** est segmentée avec un diarbre droit, **14** et **18** le sont avec un diarbre alterné et **22** l'est avec le diarbre diagonal. Les résultats sont présentés dans le tableau (TAB.2)

## 4 Conclusion.

L'utilisation des champs de Markov cachés est tout à fait efficace dans un grand nombre de situations. Cependant, les méthodes correspondantes sont relativement consommatrices de temps de calcul d'une part et relativement dif-

TAB. 2: Comparaison des diarbres et des champs.

Vérité	Image bruitée	Err. champs	Err. arbre
9	10: N(1,1)-E(1)	11: 4.0%	12: 3.5%
13	14: E(1)-E(3)	15: 11.0%	16: 9.0%
17	18: N(1,1)-N(2,1)	19: 14.0%	20: 9.5%
21	22: N(1,2)-E(1)	23: 10.1%	24: 9.6%

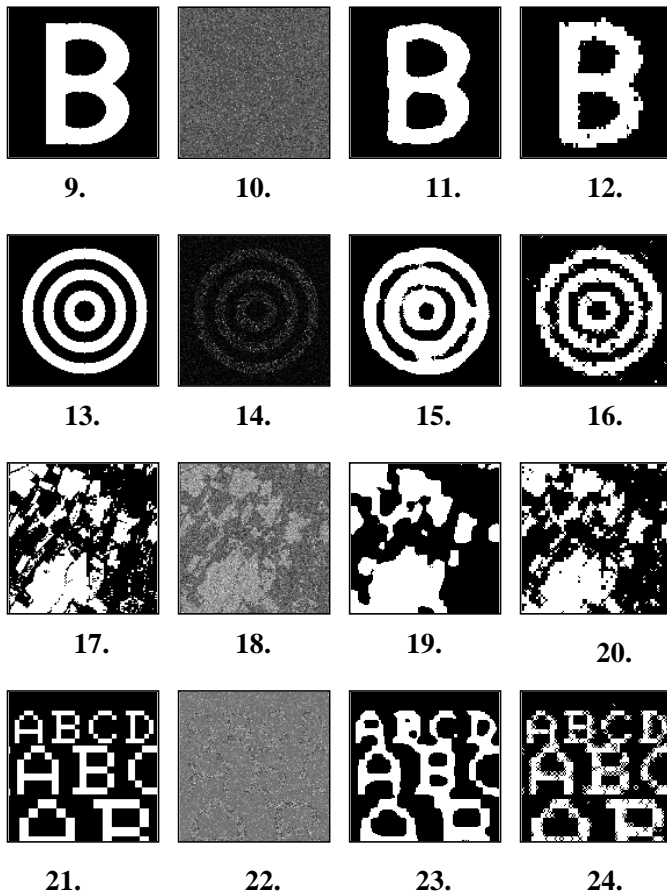


FIG. 7: Segmentations par champs et par arbres.

faciles à étendre au contexte de la multirésolution d'autre part. Les méthodes fondées sur les arbres de Markov cachés, plus récentes, pallient ces deux difficultés. Cependant, un caractère parfois un peu approximatif de la qualité des segmentations, et en particulier la possible apparition de « blocs » au niveau des résultats, constitue une contrepartie aux qualités sus-mentionnées.

Nous avons proposé dans cet article deux modifications du modèle classique par quadarbre visant l'amélioration de l'efficacité de la méthode MPM correspondante : (i) descendance par deux (et non par quatre) pixels, avec les possibles orientations suivant les diagonales, (ii) dépendance logarithmique des probabilités des transitions de la résolution. Les modifications apportées semblent, dans un cadre relativement restreint des simulations, rendre l'efficacité des segmentations fondées sur les arbres comparables à celle fondées sur les champs de Markov. Par ailleurs, nous avons effectué nos simulations dans le contexte de bruitages non nécessairement gaussiens, ce qui constitue un

premier pas vers l'utilisation des mélanges généralisés [8].

Globalement, nos simulations semblent indiquer l'existence de situations dans lesquelles les méthodes par arbres de Markov peuvent concurrencer, au niveau des résultats, les méthodes par champs de Markov. Cependant, des simulations complémentaires sont nécessaires pour valider ces premiers résultats dans un cadre plus général : modèles par champs plus complexes, mélanges généralisés, ...

## Références

- [1] L.E. Baum, T. Petrie, G. Soules et N. Weiss (1970). A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic function of Markov chains. *Ann. Math Stat.*, Vol. 41, pp. 164-171.
- [2] B. Benmiloud, W. Pieczynski (1995). Estimation des paramètres dans les chaînes de Markov cachées et segmentation d'images, *Traitement du signal*, Vol. 12, No. 5, pp. 433-454.
- [3] C. Bouman and M. Shapiro (1994). A multiscale random field model for Bayesian image segmentation, *IEEE Transaction on IP*, Vol. 3, No. 2, pp. 162-177.
- [4] G. Celeux, J. Diebolt, (1986). L'algorithme SEM: Un algorithme d'apprentissage probabiliste pour la reconnaissance de mélanges de densités, *Revue de Statistique Appliquée*, Vol. 34, No. 2.
- [5] C. Collet, P. Thourel, M. Mignotte, P. Pérès et P. Bouthémy (1998). Segmentation Markovienne hiérarchique multimodèle d'images sonar haute résolution, *Traitement du Signal*, Vol. 15, No. 3, pp. 231-250.
- [6] A.P. Dempster, N.M. Laird and D.B. Rubin (1977). Mixture densities, maximum likelihood from incomplete data via the EM Algorithm, *Journal of the Royal Stat. Society*, Vol. 39, No. 1, pp. 1-38.
- [7] S. Geman, G. Geman, (1984). Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images, *IEEE Transactions on PAMI*, Vol. 6, pp. 721-741.
- [8] N. Giordana and W. Pieczynski (1997). Estimation of generalized Multisensor Hidden Markov Chains and Unsupervised Image Segmentation, *IEEE on PAMI*, Vol. 19, No. 5, pp. 465-475.
- [9] J.M. Laferté, F. Heitz, P. Perez (1998). Modèles markoviens d'images et algorithmes d'estimation non linéaire sur le quadarbre, *Traitement du signal*, Vol. 15, No. 3, pp. 213-230.
- [10] J. Marroquin, S. Mitter, T. Poggio, (1987). Probabilistic solution of ill-posed problems in computational vision, *Journal of the American Statistical Association*, 82, pp. 76-89.
- [11] W. Pieczynski (1994). Champs de Markov cachés et estimation conditionnelle itérative, *Traitement du signal*, Vol. 11, No. 2, pp. 141-153.
- [12] F. Salzenstein, (1997). Segmentation statistique d'images, Thèse de l'Université Rennes I.