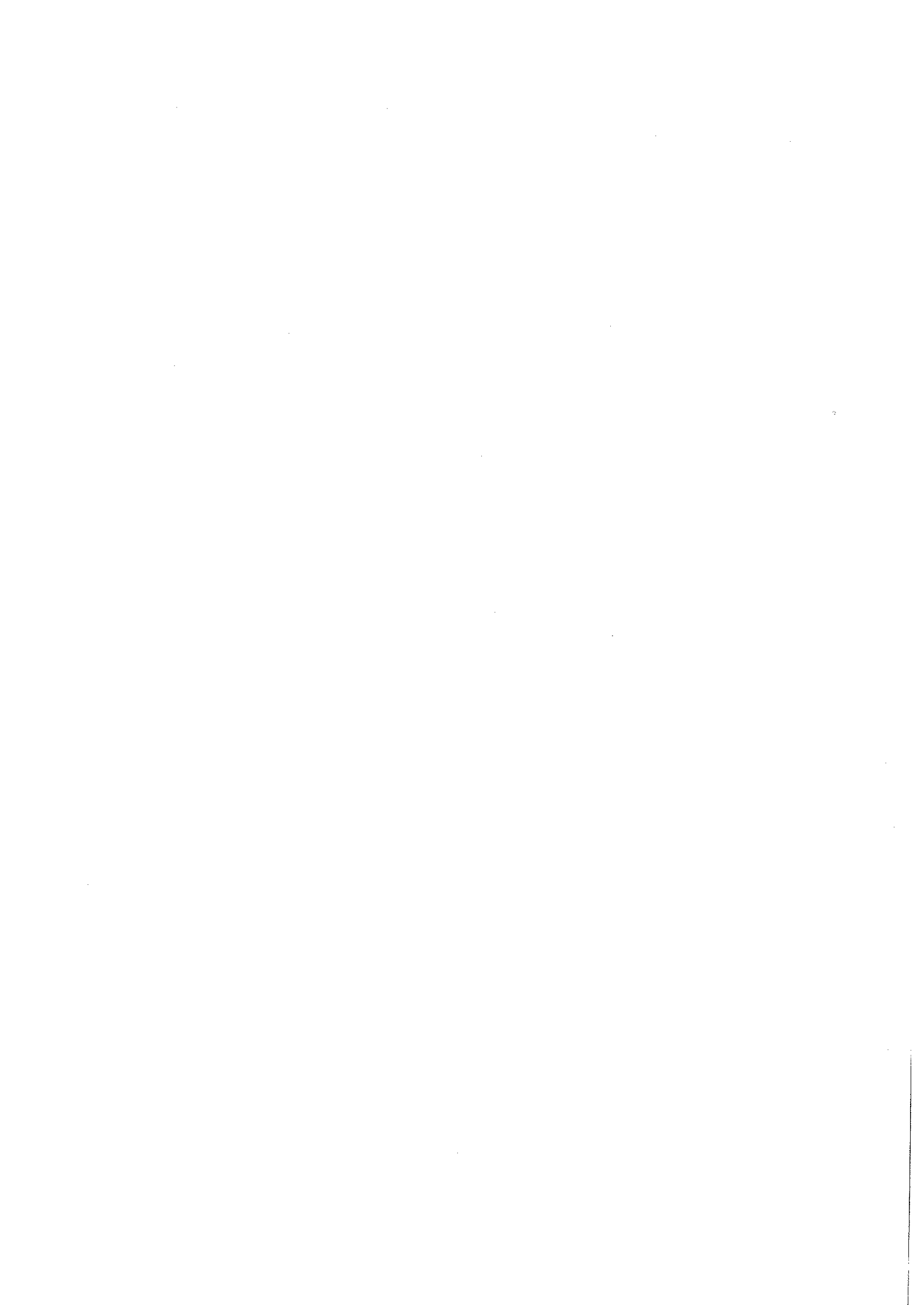


Département Communications, Images et Traitement de l'Information  
(CITI)

Yann MEURISSE



**Éléments de théorie du signal**



## TABLE DES MATIERES

I. Généralités sur les signaux .....	1
I.1. Introduction .....	1
I.2. Classification des signaux .....	2
I.3. Représentation des signaux .....	4
II. Opérations sur les signaux .....	7
II.1 Multiplication temporelle .....	7
II.2 Produit de convolution .....	8
II.3 Impulsion ou distribution de Dirac .....	8
II.4 Décomposition en série de Fourier .....	9
II.5 Transformation de Fourier .....	11
II.5.1. Définition .....	11
II.5.2. Propriétés de la transformée de Fourier .....	12
II.5.3. Transformées de Fourier usuelles .....	14
III. Signaux déterministes .....	17
III.1. Signaux déterministes d'énergie finie .....	17
III.2. Signaux déterministes de puissance moyenne finie .....	19
Enoncés d'exercices .....	21
IV. Signaux aléatoires .....	25
IV.1. Définition et propriétés des processus aléatoires .....	25
IV.1.1. Modélisation .....	26
IV.1.2. Moments temporels et moments statistiques .....	27
IV.1.3. Stationnarité et ergodicité .....	28
IV.2. Densité spectrale de puissance des processus aléatoires du 2 <sup>o</sup> ordre .....	30
Enoncés d'exercices .....	33
V. Filtrage linéaire et invariant dans le temps .....	37
V.1. Définitions .....	37
V.2. Equations de fonctionnement d'un FLIT .....	38
V.3. Propriétés d'un filtre LIT .....	40
V.3.1. Causalité .....	40
V.3.2. Stabilité .....	41
V.4. Distorsion .....	42
V.4.1. Filtre passe-bas idéal .....	43
V.4.2. Filtre passe-bande idéal .....	43
Enoncés d'exercices .....	45
VI. Filtrage des signaux .....	47

VI. Filtrage des signaux déterministes .....	47
VI.1. Signaux d'énergie finie .....	47
VI.2. Signaux de puissance finie .....	48
VII. Filtrage des signaux aléatoires .....	49
VII.1. Propriétés statistique du signal filtré .....	49
VII.2. Densité spectrale de puissance .....	50
VII.3. Théorème des interférences .....	50
Enoncés d'exercices .....	52
VII. Signaux à bande étroite .....	59
VII.1. Transformée de Hilbert .....	59
VII.2. Signal analytique .....	62
VII.3. Enveloppe complexe .....	63
VIII. L'échantillonnage .....	69
VIII.1 L'échantillonnage : point de vue théorique .....	70
VIII.2 L'échantillonnage : point de vue pratique .....	73
VIII.2.1 L'échantillonneur suiveur .....	73
VIII.2.2 L'échantillonneur bloqueur .....	75
VIII.3 Echantillonnage des signaux à bande étroite .....	78
Enoncés d'exercices .....	81
IX. Signaux à temps discret .....	83
I. Généralités .....	83
II. Transformée en Z - Transformée de Fourier. ....	85
II.1 Transformée en Z .....	85
II.2 Transformée de Fourier .....	87
Enoncés d'exercices .....	89
X. Filtrage à temps discret .....	91
I. Filtrage linéaire et invariant dans le temps. ....	91
I.1 Définitions .....	91
I.2 Equations de récurrence linéaire, à coefficients constants. ....	92
II Filtres à réponse impulsionnelle finie ou infinie. ....	96
II.1 Les filtres transversaux .....	96
II.2 Les filtres purement récurrents (tous pôles) .....	98
II.1 Les filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII) .....	100
Enoncés d'exercices .....	101
XI. Transformée de Fourier discrète .....	103
I. Définition de la transformée de Fourier discrète .....	103
II. Approximation réalisée par la TFD. ....	104
III. Principe des algorithmes rapides (FFT). ....	105

Annexes.....	107
Formule de Cauchy et inversion de la transformée en $z$ par la méthode des résidus .....	107
Corrigés des exercices.....	109



## I. Généralités sur les signaux

---

### I.1. Introduction

L'objectif fondamental de la Théorie du Signal est de représenter mathématiquement un signal et de permettre la mise en évidence, sous forme mathématique, des ses principales propriétés.

Qu'appelle-t-on signal ?

Sans vouloir donner une définition exhaustive de la notion de signal, nous considérerons de façon très générale un signal comme étant la représentation physique d'une information.

Exemple 1 : Une information peut par exemple être matérialisée par une tension électrique, variable au cours du temps (signal de parole, signal numérique ...), et représentée par une fonction  $v(t)$ .

Exemple 2 : La même information pourrait être concrétisée par l'expression d'un champ électrique en tout point de l'espace, également variable au cours du temps et que l'on pourrait représenter par une fonction vectorielle de plusieurs variables soit  $\vec{E}(t,x,y,z)$ .

Ces 2 exemples nous montrent que :

- les signaux peuvent être de nature physique très diverse (électrique, optique, acoustique ...). La Théorie du Signal fait abstraction de la nature physique des signaux pour ne s'intéresser qu'à leur expression mathématique.
- Les signaux seront représentés mathématiquement par l'intermédiaire d'une fonction d'une (cf. Ex. 1) ou de plusieurs (cf. Ex. 2) variables. On parlera alors de signaux à une ou plusieurs dimensions. Ces fonctions peuvent être à valeurs scalaires réelles ou complexes (cf. Ex. 1) ou à valeurs vectorielles (cf. Ex. 2).

Nous limiterons notre étude aux signaux à une dimension (une seule variable) et scalaires donc représentés par une fonction notée usuellement  $x(t)$ , à valeurs réelles ou complexes dans  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ . La variable " $t$ " représentera communément le temps (mais pourrait en fait représenter toute autre grandeur).

Dans cette classe déjà semble-t-il restreinte, il existe de nombreux types de signaux et nous allons commencer par opérer un certain classement. Ce classement est nécessaire car, comme nous le verrons par la suite, les outils mathématiques que nous serons amenés à utiliser vont, dans une certaine mesure, dépendre du type de signal auquel on s'intéresse.

## I.2. Classification des signaux

### I.2.1. Classification signal déterministe - signal aléatoire

Un signal déterministe est un signal dont l'évolution au cours du temps est complètement connue et donc parfaitement prévisible.

Exemple : Un signal sinusoïdal dont les paramètres amplitude maximale  $A$ , fréquence  $f_0$  et phase initiale  $\varphi_0$  sont tous connus à priori. Un tel signal sera modélisé par une fonction déterministe  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$  qui nous permet de connaître la valeur  $x(t)$  du signal pour tout instant quelconque  $t$ .

Parmi ces signaux on trouvera notamment les signaux "de laboratoire" : signaux de test ou d'étalonnage.

Par opposition, un signal aléatoire est un signal non parfaitement connu à l'avance et par suite non complètement prédictible.

Exemple : Pour illustrer cette définition reprenons l'exemple précédent en supposant cette fois que l'un des paramètres caractérisant le signal sinusoïdal ne soit pas parfaitement connu de l'expérimentateur. Ce serait le cas notamment si on utilisait la fréquence pour transmettre une information binaire par un codage du type :

"0" ---> fréquence  $f_1$

"1" ---> fréquence  $f_2$

Un observateur du signal, n'ayant pas connaissance à priori de l'information à transmettre, serait incapable de prédire avec exactitude la valeur du signal à un instant  $\tau$  quelconque.

Les signaux aléatoires sont donc engendrés par des causes que l'observateur ne maîtrise pas complètement. C'est le cas des signaux porteurs d'information (parole, données, images ...) mais également des signaux perturbateurs comme le bruit.



Pour étudier ce type de signal nous ferons appel à la Théorie des Probabilités.

### I.2.2. Classification énergétique

Cette classification repose sur la double définition suivante :

On appelle *énergie* d'un signal réel ou complexe  $x(t)$  la quantité :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

et *puissance moyenne* de  $x(t)$  la quantité :

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

Ces appellations ne préjugent en aucune manière de la nature physique du signal (électrique, optique, acoustique, ...). Notons cependant que, dans le cas particulier où  $x(t)$  représente une intensité ou une tension électrique, ces termes s'interprètent comme étant l'énergie électrique ou la puissance électrique moyenne aux bornes d'une résistance de  $1\Omega$ .

A partir de ces définitions on distingue :

- d'une part, les signaux dits "d'énergie finie" c'est à dire tels que  $E < +\infty$
- d'autre part, les signaux dits "de puissance moyenne finie" c'est à dire tels que  $0 < P < +\infty$

La première catégorie comprend les signaux transitoires qu'ils soient déterministes ou aléatoires comme par exemple l'impulsion carrée de largeur  $T$  :  $x(t) = \Pi_T(t)$  ou l'impulsion gaussienne  $x(t) = \exp(-t^2)$ .

La deuxième catégorie englobe les signaux dits permanents, plus idéalisés en ce sens que leur support temporel est non borné.

A noter que certains signaux théoriques n'appartiennent à aucune de ces deux catégories comme par exemple la distribution ou impulsion de Dirac  $\delta(t)$  qui est un signal purement théorique mais de grande utilité comme nous le verrons par la suite.

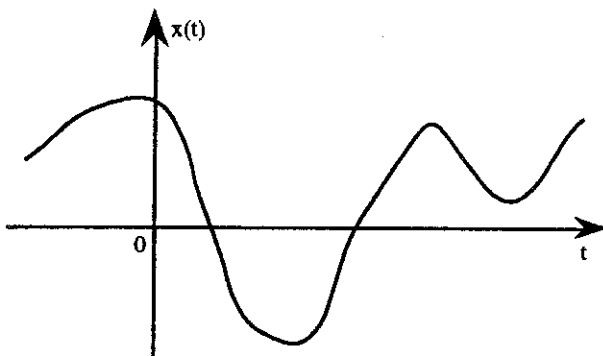
### I.2.3. Classification discret - continu

On s'intéresse cette fois au caractère discret ou continu que peuvent avoir la variable (le temps en principe) et/ou les valeurs prises par le signal ce qui nous fournit en définitive quatre possibilités. Précisons tout d'abord le terme "discret".

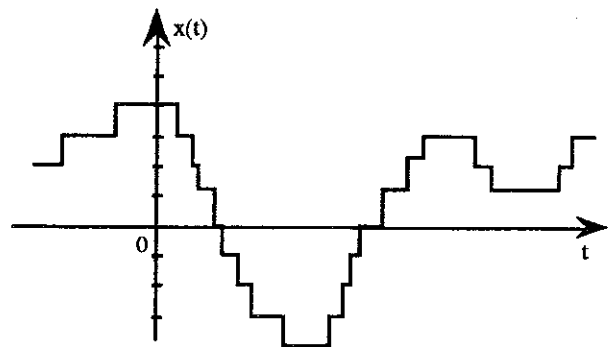
Dire que le temps est discrétisé signifie que l'on ne considère qu'un ensemble au plus dénombrable d'instants possibles, en général équidistants donc multiples entiers d'un instant  $T$  et par suite de la forme  $t_k = kT$   $k \in \mathbb{Z}$  ou plus simplement encore  $t_k = k$  après normalisation  $T = 1$ .

De manière analogue un signal est dit "à valeurs discrètes" si l'ensemble de ses valeurs possibles est au plus dénombrable.

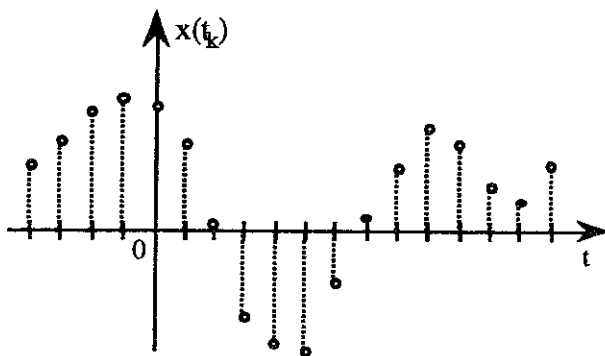
Par combinaisons de toutes les possibilités entre elles on distingue donc les quatre types suivants:



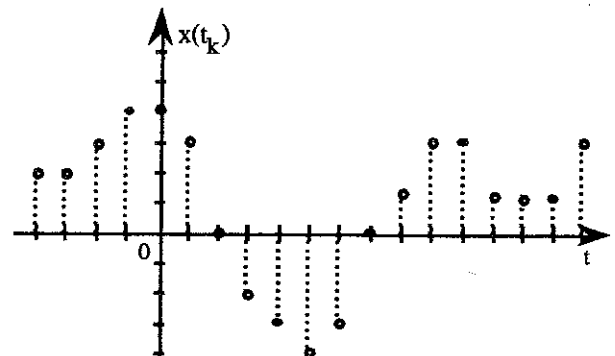
signal analogique  
(temps continu, valeurs continues)



signal quantifié  
(temps continu, valeurs discrètes)



signal échantillonné  
(temps discret, valeurs continues)

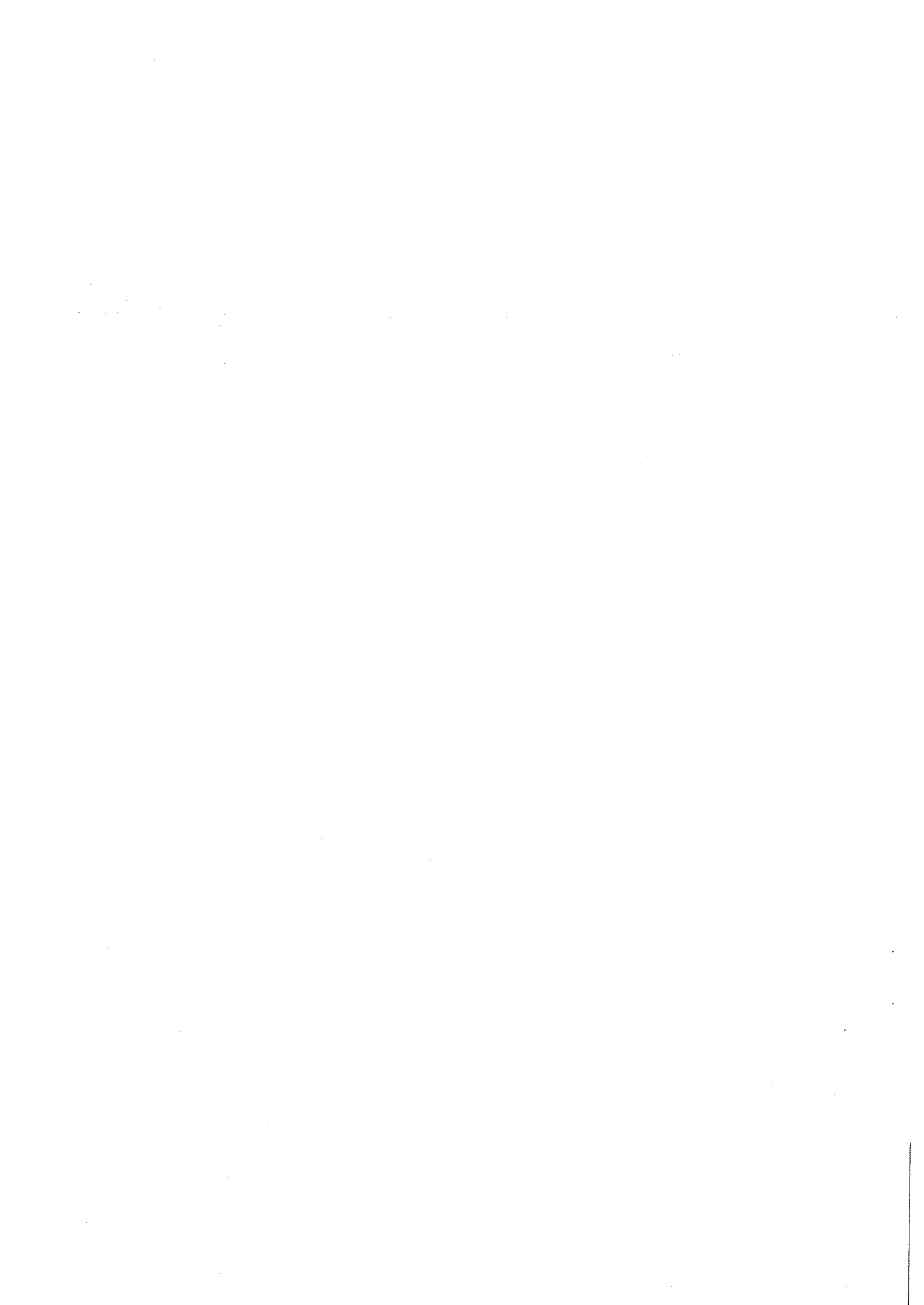


signal numérique  
(temps discret, valeurs discrètes)

Nous n'étudierons ici que les signaux continus (à valeurs continues).

### I.3. Représentation des signaux

Pour étudier un signal, ses propriétés ou les transformations qu'on lui fait subir, nous verrons qu'il est très commode de disposer, pour ce signal, de 2 représentations distinctes mais équivalentes : l'une dans l'espace des temps (représentation temporelle) sous la forme d'une fonction  $x(t)$  l'autre dans l'espace des fréquences (représentation fréquentielle ou spectrale) sous la forme d'une fonction  $X(f)$ . Le passage de l'une à l'autre se faisant grâce à la transformation de Fourier ou à son inverse.



## II. Opérations sur les signaux

Les objectifs essentiels de ce chapitre sont, d'une part de rappeler un certain nombre de résultats mathématiques importants et, d'autre part, de présenter quelques signaux que nous utiliserons très souvent par la suite.

### II.1 Multiplication temporelle

Etant donné 2 signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  on peut en définir un 3<sup>ème</sup> par simple multiplication :  
 $z(t) = x(t) \cdot y(t)$

#### Exemple 1 : Signal causal

Soit un signal  $x(t)$ , de support  $t \in ]-\infty, +\infty[$ , le signal causal associé  $y(t)$  c'est-à-dire égal à  $x(t)$  pour  $t \geq 0$  et nul pour  $t < 0$  sera défini par :

$$y(t) = u(t) \cdot x(t)$$

où  $u(t)$  désigne la fonction *échelon unité* ou fonction de Heaviside :  $u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

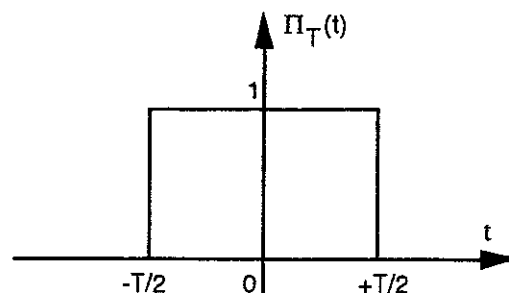
#### Exemple 2 : Sinusoïde tronquée

Une impulsion de sinusoïde de largeur  $T$ , centrée sur 0, sera définie par :

$$x(t) = \Pi_T(t) \cdot a \cos(2\pi f_0 t)$$

où  $\Pi_T(t)$  désigne la fonction *porte*, de largeur  $T$ , centrée sur 0 :

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



## II.2 Produit de convolution

C'est une opération importante car, comme nous le verrons par la suite, elle caractérise le filtrage linéaire des signaux.

Par définition :

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u)du$$

Propriétés :

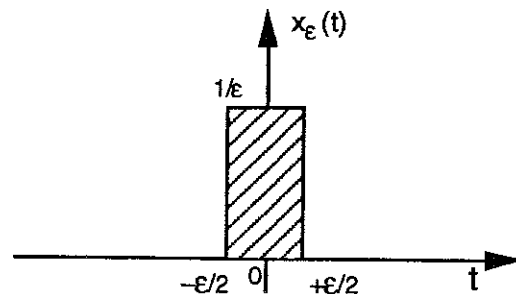
Cette opération est commutative, distributive par rapport à l'addition : i.e.  $x(t) * (y(t) + z(t)) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$  et possède un élément neutre : l'impulsion ou distribution de Dirac  $\delta(t)$ .

## II.3 Impulsion ou distribution de Dirac

L'impulsion de Dirac n'est pas à proprement parler une fonction mais une distribution. On peut la définir mathématiquement en faisant appel à la Théorie des Distributions ou bien, comme nous allons le faire, adopter une approche plus "physique".

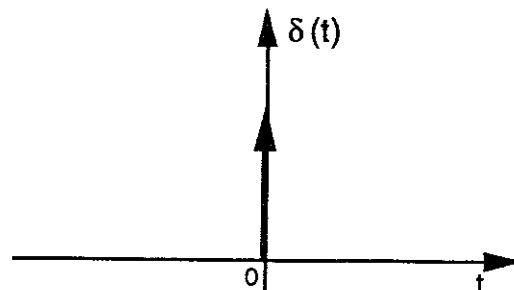
Considérons en effet la famille de fonctions :

$$x_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon(t)$$

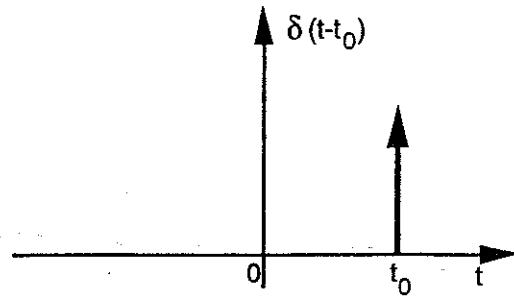


l'impulsion de Dirac en 0, peut être considérée comme étant la limite, quand  $\varepsilon$  tend vers 0 de  $x_\varepsilon(t)$ .

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon(t)$$



On définirait de manière analogue  $\delta(t-t_0)$  comme l'impulsion de Dirac en  $t_0$ , représentée par la figure ci-contre :



Propriétés :

- $\forall \varepsilon \neq 0 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x_\varepsilon(t) dt = 1$  d'où, à la limite :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1} \quad \text{de même} \quad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) dt = 1}$$

Cela conduit à assimiler  $\delta(t)$  à une impulsion infiniment brève, centrée à l'origine et d'aire égale à 1.

- Produit simple d'une fonction par une impulsion de Dirac :

$$\boxed{x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)} \quad \text{et plus généralement} \quad \boxed{x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)}$$

- $\delta(t)$  est l'élément neutre du produit de convolution :

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau) d\tau$$

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(\tau-t) d\tau \quad \text{car } \delta \text{ est paire}$$

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(\tau-t) d\tau \quad \text{d'après la propriété précédente}$$

$$x(t) * \delta(t) = x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau-t) d\tau$$

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{x(t) * \delta(t) = x(t)} \quad \text{et plus généralement} \quad \boxed{x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)}$$

Cette dernière relation est très utile pour modéliser la translation d'une fonction  $x(t)$ .

## II.4 Décomposition en série de Fourier

Si  $x(t)$  est une fonction périodique, de période  $T$  et sous réserve que  $x(t)$  ne présente qu'un ensemble dénombrable de points de discontinuité de 1<sup>o</sup> espèce par période alors  $x(t)$  peut s'écrire sous la forme :

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) \quad \text{où } a_n \text{ et } b_n \text{ sont les coefficients de la}$$

décomposition en série de Fourier de  $x(t)$  :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) dt$$

Ecriture équivalente en utilisant la décomposition sur les exponentielles complexes :

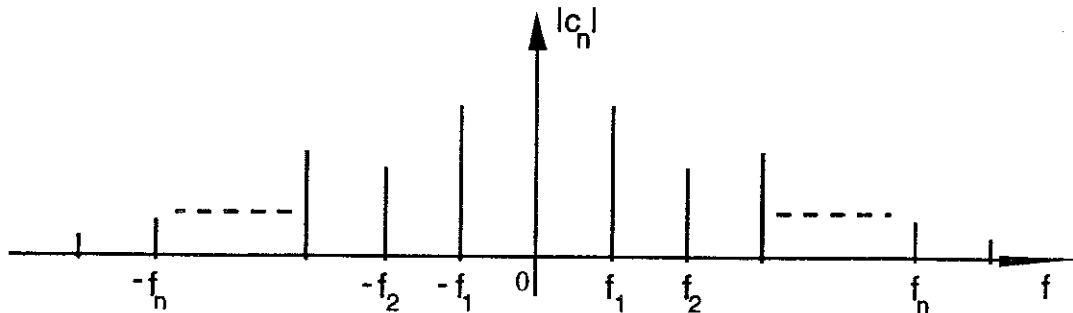
$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{T} t\right)$  avec  $c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \exp\left(-i2\pi \frac{n}{T} t\right) dt$  : coefficient de Fourier à priori complexe.

Une propriété intéressante des  $c_n$  est que :  $x(t)$  réel  $\Leftrightarrow c_{-n} = \overline{c_n}$  (symétrie hermitienne)

Interprétation : On a décomposé  $x(t)$  en une somme de fonctions sinusoïdales de fréquences :

$f_1 = \frac{1}{T}$ ,  $f_2 = \frac{2}{T}$ , ...,  $f_n = \frac{n}{T}$ , ... ( $f_1$  : fréquence fondamentale,  $f_n = n f_1$  : harmonique d'ordre  $n$ ).

La contribution de chacune de ces "fréquences" est caractérisée par le coefficient  $c_n$  de la décomposition en série de Fourier. En particulier, le tracé de  $|c_n|$  nous fournit le *spectre en amplitude* du signal  $x(t)$ .



Remarque : En considérant non plus  $|c_n|$  mais  $\text{Arg}(c_n)$  on aurait obtenu le *spectre en phase* de  $x(t)$ .

En conclusion, pour un signal périodique, on dispose donc de 2 représentations du même signal:

- une représentation temporelle :  $x(t)$
- une représentation fréquentielle : le spectre du signal obtenu grâce aux  $c_n$ .

Le lien entre ces 2 représentations duales d'un même signal est la décomposition en série de Fourier.

La généralisation de ce résultat pour des signaux non-périodiques sera fournie par la Transformation de Fourier.



## II.5 Transformation de Fourier

Le principe de la généralisation est de considérer qu'un signal non-périodique est en fait un signal périodique, de période "infinie" (on fait tendre  $T$  vers l'infini). Ceci nous amène en définitive à la définition suivante :

### II.5.1. Définition

Si  $x(t)$  est une fonction appartenant à l'ensemble  $L^2$  des fonctions de carré sommable i.e. telle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$ , sa transformée de Fourier  $X(f)$  existe et appartient également à  $L^2$ . Les formules de transformations directe et inverse sont données par :

$$\boxed{X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt} \quad \text{et} \quad \boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{+i2\pi f t} df}$$

Dans la suite ces relations seront notées indifféremment :

$$X(f) = \text{TF}[x(t)](f) \quad \text{et} \quad x(t) = \text{TF}^{-1}[X(f)](t)$$

ou encore

$$x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f)$$

$$X(f) \xleftarrow{\text{TF}^{-1}} x(t)$$

Remarque : Il est à noter que la condition d'existence de la Transformée de Fourier d'une fonction  $x(t)$  donnée plus haut ( $x(t)$  appartient à l'ensemble  $L^2$ ) est en fait une condition suffisante mais non nécessaire. Nous verrons dans la suite des exemples de fonctions ne remplissant pas cette condition et admettant cependant une transformée de Fourier (ce sera le cas notamment des fonctions sin, cos et plus généralement des fonctions périodiques).

#### Remarques :

- La Transformée de Fourier est le lien entre 2 représentations duales d'un même signal : une représentation *temporelle*  $x(t)$  et une représentation *fréquentielle*  $X(f)$ . La réciprocity de la transformation assurant que ces 2 représentations sont porteuses exactement des mêmes informations.

- $X(f)$  est une quantité à priori complexe.

La représentation de  $|X(f)|$  fournira le spectre en amplitude du signal.

La représentation de  $\text{Arg}[X(f)]$  fournira le spectre en phase du signal.

• Propriété de symétrie hermitienne :

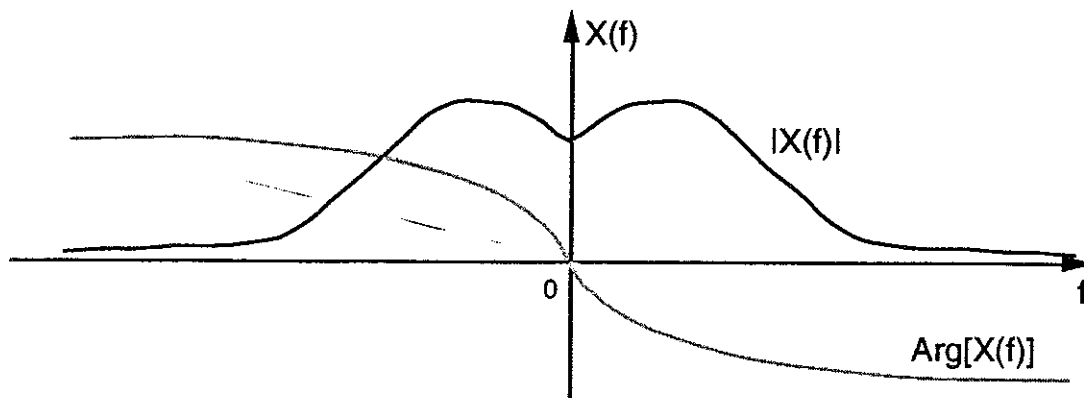
Si  $x(t)$  est réel alors  $X(-f) = \overline{X(f)}$ , en effet :

$$\overline{X(f)} = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t)} e^{+i2\pi ft} dt$$

soit 
$$\overline{X(f)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{+i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi(-f)t} dt = X(-f)$$

d'où  $|X(-f)| = |X(f)|$  (le spectre en amplitude possède alors une symétrie paire)

et  $\text{Arg}[X(-f)] = -\text{Arg}[X(f)]$  (le spectre en phase possède une symétrie impaire)



Spectre d'un signal réel

## II.5.2. Propriétés de la transformée de Fourier

Rappelons, sous forme de tableau, les principales propriétés de la transformée de Fourier

	$x(t) \xrightleftharpoons[\text{TF}^{-1}]{\text{TF}} X(f)$	
Linéarité	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(f) + bX_2(f)$
Changt. d'échelle	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$
Th. du retard	$x(t - t_0)$	$e^{-i2\pi ft_0} X(f)$

Modulation	$e^{i2\pi f_0 t} x(t)$	$X(f - f_0)$
Dérivation dans le domaine temporel*	$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ $x^{(n)}(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$2i\pi f X(f)$ $(2i\pi f)^n X(f)$
Dérivation dans le domaine fréquentiel	$t x(t)$	$\frac{1}{2i\pi} \frac{dX(f)}{df}$
Conjugaison	$\bar{x}(t)$	$\bar{X}(-f)$

\* si  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0$

Propriété d'involution :

$$\text{TF}[\text{TF}[x(t)]] = x(-t) \quad \text{soit, sous une autre forme} \quad x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) \xrightarrow{\text{TF}} x(-t)$$

Citons également les 2 théorèmes suivants :

**Théorème de Plancherel :**

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) y(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) * Y(f) \\ x(t) * y(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) Y(f) \end{array}}$$

**Théorème de Parseval :**

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \bar{y}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \bar{Y}(f) df}$$

En particulier ; si  $x(t)=y(t)$  :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df}$$

### II.5.3. Transformées de Fourier usuelles

$$\bullet \quad \boxed{\delta(t) \xrightarrow{\text{TF}} 1} \quad [\text{II.1}]$$

En effet  $\forall x(t) \quad x(t) * \delta(t) = x(t)$  donc, d'après le théorème de Plancherel,  
 $X(f) \cdot \text{TF}[\delta(t)] = X(f)$  donc  $\text{TF}[\delta(t)] = 1$

$$\bullet \quad \boxed{1 \xrightarrow{\text{TF}} \delta(t)} \quad [\text{II.2}]$$

En effet, d'après la propriété d'involution :  $\delta(t) \xrightarrow{\text{TF}} 1 \xrightarrow{\text{TF}} \delta(-t) = \delta(t)$

$$\bullet \quad \boxed{\delta(t-t_0) \xrightarrow{\text{TF}} e^{-i2\pi f t_0} \quad \text{et} \quad \delta(t+t_0) \xrightarrow{\text{TF}} e^{+i2\pi f t_0}} \quad [\text{II.3}]$$

Il suffit d'appliquer le théorème du retard à la relation [II.1]

On en déduit réciproquement que :

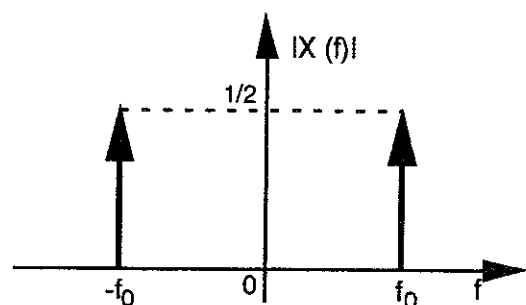
$$\bullet \quad \boxed{e^{+i2\pi f_0 t} \xrightarrow{\text{TF}} \delta(f-f_0) \quad \text{et} \quad e^{-i2\pi f_0 t} \xrightarrow{\text{TF}} \delta(f+f_0)} \quad [\text{II.4}]$$

On en déduit facilement, grâce à la propriété de linéarité que :

$$\bullet \quad \boxed{\cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow{\text{TF}} \frac{1}{2} [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]} \quad [\text{II.5}]$$

$$\bullet \quad \boxed{\sin(2\pi f_0 t) \xrightarrow{\text{TF}} \frac{1}{2i} [\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)]} \quad [\text{II.6}]$$

On peut noter que le spectre en amplitude des signaux sinusoidaux est constitué de 2 impulsions de Dirac (spectre de raies) en  $-f_0$  et  $+f_0$ .



Plus généralement, tout signal périodique admet un spectre en amplitude constitué de raies.

A titre d'exercice, nous allons calculer la Transformée de Fourier d'une fonction que nous utiliserons très souvent par la suite : la fonction porte  $\Pi_T(t)$ .

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-i2\pi ft} dt = \left[ \frac{e^{-i2\pi ft}}{-i2\pi f} \right]_{-T/2}^{+T/2}$$

$$X(f) = -\frac{1}{i2\pi f} [e^{-i\pi f T} - e^{+i\pi f T}] = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = \frac{T \sin(\pi f T)}{\pi f T}$$

$$X(f) = T \operatorname{sinc}(\pi f T)$$

en posant  $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  la fonction *sinus cardinal*

en résumé :

$$\bullet \quad x(t) = \Pi_T(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) = T \operatorname{sinc}(\pi f T) \quad [\text{II.7}]$$

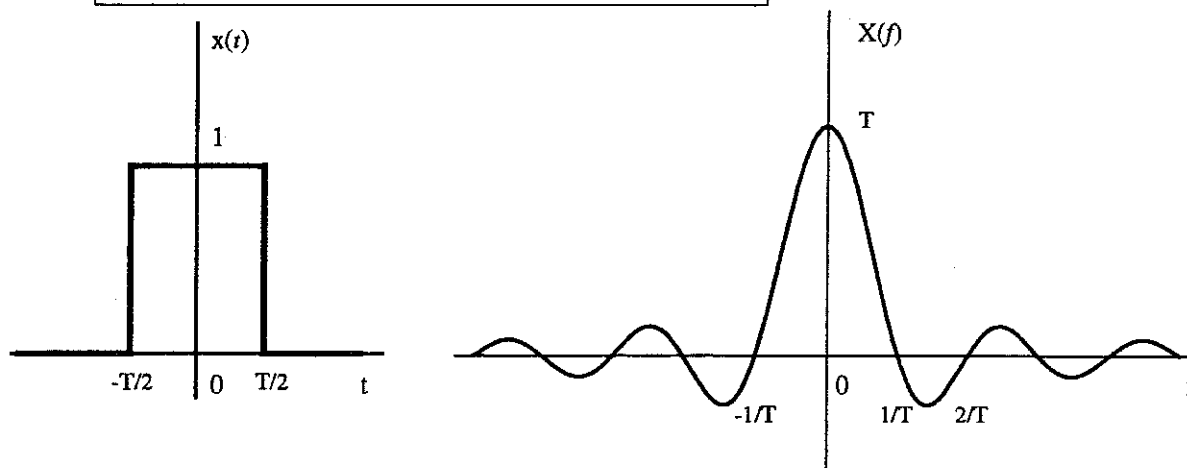


figure II.1 Fonction porte et sa TF

La forme de  $X(f)$  est donnée figure II.1. On peut noter que si la durée  $T$  du signal diminue, le support moyen de sa TF augmente. Cette propriété de "proportionnalité inverse" des supports temporel et fréquentiel d'un même signal est tout à fait générale ; nous aurons l'occasion d'en voir de multiples exemples.

Les principaux outils mathématiques nécessaires à l'étude des signaux ayant été rappelés, nous allons maintenant pouvoir commencer notre étude en considérant tout d'abord les signaux déterministes.



### III. Signaux déterministes

---

Il s'agit de signaux qui, comme on l'a vu sont entièrement prévisibles et qui peuvent donc être modélisés par une fonction au sens commun du terme  $x(t)$ , que nous appellerons fonction déterministe. Dans cette catégorie nous distinguerons toutefois d'une part les signaux d'énergie finie et d'autre part les signaux de puissance moyenne finie.

L'objectif de ce chapitre est de montrer comment on peut évaluer la manière dont se répartit selon le cas soit l'énergie soit la puissance du signal dans le domaine fréquentiel.

Ceci nous conduira à définir des notions nouvelles telles que *densité spectrale d'énergie* ou *densité spectrale de puissance* selon le cas ainsi que la notion de *fonction d'autocorrélation*.

#### III.1. Signaux déterministes d'énergie finie

Les signaux d'énergie finie sont caractérisés par le fait que  $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$ .

Il s'agit de signaux transitoires i.e. à support temporel borné tel que le signal porte  $\Pi_T(t)$  ou bien à décroissance suffisamment rapide à l'infini tel que l'impulsion gaussienne  $e^{-t^2}$ .

Il est à remarquer que la condition précédente est suffisante pour assurer, dans tous les cas, l'existence de la TF de  $x(t)$ .

En posant  $X(f)$  : la transformée de Fourier de  $x(t)$  on peut écrire d'après le théorème de Parseval (cf chap. 2) :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Cette relation permet d'interpréter  $|X(f)|^2$  comme étant la densité spectrale d'énergie du signal  $x(t)$  (en abrégé DSE) que nous noterons dorénavant  $S_{xx}(f)$ . Comme son nom l'indique la densité spectrale d'énergie représente la manière dont se répartit l'énergie du signal dans le domaine fréquentiel.

Reprenons, pour illustrer ceci, le cas de l'impulsion rectangulaire c'est à dire du signal porte  $x(t) = \Pi_T(t)$ . Nous avons vu précédemment que  $X(f) = T \text{Sinc}(\pi f T)$  ; la densité spectrale d'énergie de ce signal est donc donnée par  $S_{xx}(f) = T^2 \text{Sinc}^2(\pi f T)$ .

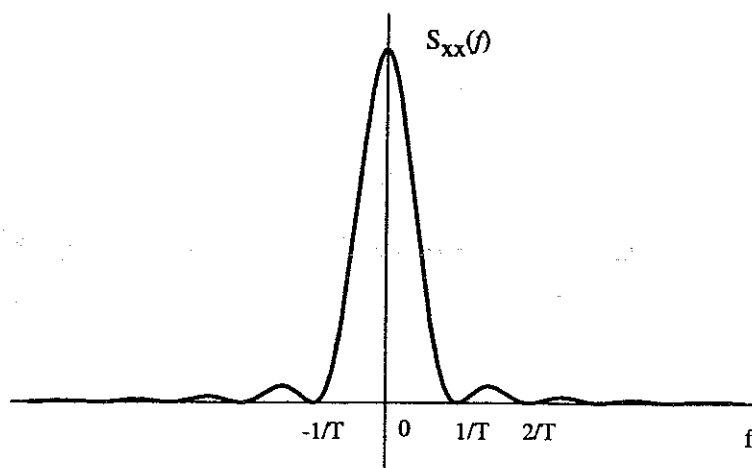


figure III.1 DSE du signal porte

Nous pourrions, à ce stade, nous contenter de ce résultat puisque nous sommes maintenant en mesure de calculer, connaissant  $x(t)$ , la densité spectrale d'énergie du signal. Cependant, et pour des raisons d'uniformisation qui apparaîtront plus clairement par la suite, nous allons définir une notion nouvelle : la *fonction d'autocorrélation* d'un signal.

Commençons pour cela par définir la notion de fonction d'intercorrélacion de 2 signaux.

Etant donné 2 signaux d'énergie finie  $x(t)$  et  $y(t)$  (réels ou complexes), on définit leur **fonction d'intercorrélacion** (temporelle) (que l'on note  $R_{xy}$ ) par :

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\bar{y}(t-\tau)dt \quad (\text{on remarque que } R_{xy}(\tau) = x(\tau)*\bar{y}(-\tau))$$

Dans le cas particulier où  $y(t) = x(t)$ , on définit la **fonction d'autocorrélacion** (temporelle) d'un signal  $x(t)$  d'énergie finie (que l'on note  $R_{xx}$ ) par :

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\bar{x}(t-\tau)dt \quad (\text{on remarque de même que } R_{xx}(\tau) = x(\tau)*\bar{x}(-\tau))$$

L'interprétation physique de la fonction d'autocorrélacion d'un signal n'est pas évidente. Disons, de manière un peu schématique, que cette fonction est une estimation de la "plus ou moins grande ressemblance" du signal avec lui-même retardé de  $\tau$ . Intuitivement, cette ressemblance devrait être maximum si le retard est nul, c'est à dire que  $R_{xx}(\tau)$  devrait être maximum en  $\tau=0$ . Nous allons confirmer cette intuition par une démonstration rigoureuse.

En effet, d'après l'inégalité de Schwartz :  $|\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx \cdot \int_a^b |g(x)|^2 dx$

$$\forall \tau \quad |R_{xx}(\tau)|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t-\tau)|^2 dt = [R_{xx}(0)]^2$$

$$\text{car } \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t-\tau)|^2 dt = R_{xx}(0) \quad (\text{on remarque au passage que } R_{xx}(0) = E)$$



$$\text{d'où } |R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0) \quad \text{car } R_{xx}(0) \geq 0$$

Calculons maintenant la TF de  $R_{xx}(\tau)$  :

$$R_{xx}(\tau) = x(\tau) * \bar{x}(-\tau) \xrightarrow[\text{TF}^{-1}]{\text{TF}} X(f) \cdot \bar{X}(-(-f)) = |X(f)|^2 = \text{DSE du signal } x(t).$$

En résumé, pour les signaux déterministes d'énergie finie :

$$\boxed{\text{DSE} = S_{xx}(f) = |X(f)|^2 = \text{TF}[R_{xx}(\tau)]}$$

**Remarque** : L'ensemble des signaux déterministes, d'énergie finie, a une structure d'espace de Hilbert.

En effet, il est clair que cet ensemble a une structure d'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ . On définit, sur cet espace vectoriel, une forme hermitienne définie positive c'est à dire un **produit scalaire** par :

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) \bar{x}_2(t) dt$$

Le produit scalaire de 2 signaux de cet espace correspond ainsi à la valeur de leur fonction d'intercorrélation évaluée en  $\tau = 0$ . L'espace des signaux muni de ce produit scalaire constitue donc un espace hermitien. On montre qu'il est complet ; il s'agit donc d'un espace de Hilbert.

### III.2. Signaux déterministes de puissance moyenne finie

Les signaux déterministes de puissance moyenne finie sont caractérisés par le fait que :

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt < +\infty.$$

Il s'agit de signaux permanents (à support temporel non borné) et cette fois nous ne disposons plus, comme précédemment d'une condition suffisante d'existence de la transformée de Fourier. N'étant plus assurés, comme dans le cas précédent, de l'existence systématique de  $X(f)$  nous allons devoir démarrer notre étude de façon différente en utilisant d'emblée la fonction d'autocorrélation du signal.

Définitions :

Etant donné 2 signaux déterministes de puissance moyenne finie,  $x(t)$  et  $y(t)$  (réels ou complexes), on définit leur **fonction d'intercorrélation** (que l'on note toujours  $R_{xy}$ ) par :

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \bar{y}(t - \tau) dt$$

Dans le cas particulier où  $y(t) = x(t)$ , on définit la **fonction d'autocorrélation** d'un signal déterministe  $x(t)$  de puissance moyenne finie (que l'on note  $R_{xx}$ ) par :

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \bar{x}(t - \tau) dt$$

On remarque que  $R_{xx}(0) = P$ .

### Densité spectrale de puissance :

Soit  $x(t)$  un signal déterministe de puissance moyenne finie  $P$ , de fonction d'autocorrélation  $R_{xx}(\tau)$ .

Nous supposons que la transformée de Fourier de  $R_{xx}(\tau)$  existe et nous l'appellerons  $S_{xx}(f)$ .

Donc  $R_{xx}(\tau) = \text{TF}^{-1}[S_{xx}(f)]$  ce qui peut encore s'écrire sous la forme :

$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) e^{i2\pi f\tau} df$  par définition de la transformée de Fourier inverse et, en particulier pour  $\tau = 0$  :

$P = R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df$  ce qui fait apparaître  $S_{xx}(f)$  comme étant la densité spectrale de puissance de  $x(t)$  (en abrégé : DSP).

En résumé : si  $x(t)$  est un signal déterministe de puissance moyenne finie sa densité spectrale de puissance est fournie par la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation.

$$\boxed{\text{DSP} = S_{xx}(f) = \text{TF}[R_{xx}(\tau)]}$$

## Enoncés d'exercices

### Exercice III.1 Dualité temps-fréquence

Le but de l'exercice est de montrer que la "durée"  $T$  d'un signal réel d'énergie finie et la "largeur"  $B$  de son spectre varient en sens inverse l'une de l'autre.

Soit  $x(t)$  un signal réel, d'énergie finie, de transformée de Fourier  $X(f)$ . Ce signal est supposé tel que  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} tx^2(t) = 0$ .

On définit sa "durée quadratique moyenne"  $T$  par :  $T^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 x^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt}$

et sa "bande quadratique moyenne occupée"  $B$  par :  $B^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 |X(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df}$

Soit  $y(t) = x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

1 - Calculer la transformée de Fourier  $Y(f)$  de  $y(t)$  et écrire l'égalité de Parseval pour montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x'^2(t) dt = 4\pi^2 B^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$$

2 - Appliquer l'inégalité de Schwarz\* à l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} tx'(t)x(t) dt$  pour montrer que  $BT \geq \frac{1}{4\pi}$ .

Conclusion?

3 - Déterminer l'ensemble des signaux d'énergie finie pour lesquels le produit  $BT$  est minimum.

4 - Calculer  $T$  et  $B$  dans le cas particulier où  $x(t)$  est une impulsion gaussienne :  $x(t) = e^{-\pi t^2}$  (on admettra que  $x(t) = e^{-\pi t^2} \xrightarrow{\text{TF}} X(f) = e^{-\pi f^2}$ ).

5 - Montrer que si  $Y(f)$  est la transformée de Fourier d'un signal  $y(t)$  alors  $\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) dt = Y(0)$ . En déduire l'énergie du signal  $x(t)$  de la question 4.

\* Inégalité de Schwarz :  $\forall a$  et  $b \quad \left| \int_a^b f(u)g(u) du \right|^2 \leq \int_a^b |f(u)|^2 du \cdot \int_a^b |g(u)|^2 du$  l'égalité n'ayant lieu que si les fonctions  $f$  et  $g$  sont proportionnelles i.e. si  $\exists \lambda$  tel que  $\forall x \quad f(x) = \lambda g(x)$

**Exercice III.2** Influence de la troncature d'un signal sur son spectre.

Soit le signal 
$$x(t) = \begin{cases} A \cos 2\pi f_0 t & -T/2 < t < T/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le représenter dans l'espace des temps ( $T > \frac{1}{f_0}$ ). Est-ce un signal d'énergie finie ou de puissance finie ?

Quel est le spectre en amplitude de ce signal ? Le représenter.

Calculer selon le cas, son énergie ou sa puissance pour la valeur particulière  $T = T_0 = \frac{1}{f_0}$ .

**Exercice III.3**

Soit le signal 
$$x(t) = \begin{cases} A e^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
 où A et  $\alpha$  sont des constantes

$> 0$

1 - Montrer que ce signal est d'énergie finie.

2 - Calculer  $R_{xx}(\tau)$  la fonction d'autocorrélation de ce signal et retrouver la valeur de l'énergie du signal grâce à  $R_{xx}$ .

3 - Calculer la densité spectrale d'énergie  $S_{xx}(f)$  de ce signal et retrouver la valeur de l'énergie du signal grâce à  $S_{xx}$ .

4 - Calculer l'énergie du signal contenue dans la bande de fréquence  $\left[ -\frac{\alpha}{2\pi}, \frac{\alpha}{2\pi} \right]$ .

**Exercice III.4**

Soit le signal d'énergie finie  $x(t) = a \cos^2(2\pi f_0 t) \text{ sinc}(2\pi B t)$  où  $B \ll f_0$ .

On rappelle que  $\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}$

Représenter le spectre en amplitude  $X(f)$  de ce signal. En déduire l'énergie de  $x(t)$ .

**Exercice III.5**

Soit  $x(t)$  un signal déterministe de puissance moyenne finie dont la fonction d'autocorrélation est :

$$R_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{2} \left[ 1 + \exp\left(-\frac{|\tau|}{RC}\right) \right] \quad \text{avec } A = \text{Cte}$$

- 1 - Donner l'expression de la densité spectrale de puissance  $S_{xx}(f)$  du signal  $x(t)$  et la représenter graphiquement.
- 2 - Quelle est la puissance totale de ce signal? On utilisera deux méthodes différentes pour effectuer le calcul.
- 3 - Quelle est la puissance contenue dans la bande fréquence  $\left[ -\frac{1}{2\pi RC}, +\frac{1}{2\pi RC} \right]$ ?

### Exercice III.6

Montrer que l'ensemble des signaux  $x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T_0}} e^{i2\pi\frac{n}{T_0}t} \Pi_{T_0}(t - \alpha)$  constitue une famille de signaux orthonormés.

### Exercice III.7

Soit  $\{\phi_i(t)\}_{i=1..N}$  un ensemble de  $N$  signaux orthonormés et soit  $x(t)$  un signal quelconque.

Soit  $\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i(t)$  une approximation linéaire de  $x(t)$  en termes de  $\{\phi_i(t)\}_{i=1..N}$ . On recherche les  $\alpha_i$  qui minimisent l'erreur d'approximation :

$$\varepsilon^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - \hat{x}(t)|^2 dt$$

1 - Montrer que de tels  $\alpha_i$  vérifient :

$$\alpha_i = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \phi_i^*(t) dt$$

2 - Montrer que dans ce cas :

$$\varepsilon_{\min}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt - \sum_{i=1}^N |\alpha_i|^2$$



## IV. Signaux aléatoires

---

### IV.1. Définition et propriétés des processus aléatoires

Nous allons maintenant nous intéresser à des signaux qui, tout en dépendant d'un paramètre tel que le temps comme précédemment, dépendent en outre de facteurs dont la connaissance précise échappe à l'observateur, rendant de ce fait le signal non parfaitement prévisible. On résume l'ensemble de ces facteurs plus ou moins inconnus sous le terme de "hasard" ; on appelle signal aléatoire le signal résultant et processus aléatoire le modèle mathématique destiné à représenter de tels signaux.

Pour illustrer ce propos, commençons par considérer un exemple.

Exemple : Soit un générateur de signaux réglé une fois pour toute pour délivrer un signal sinusoïdal d'amplitude maximale  $A$  et de fréquence  $f_0$  données. A un instant  $t=0$ , on met en service l'appareil. On peut envisager 2 modes de fonctionnement de l'appareil :

1<sup>er</sup> cas : Si, à chaque mise sous tension, la phase initiale  $\phi_0$  du signal de sortie est toujours la même ( $\phi_0 = 0$  par exemple) le signal généré sera parfaitement et complètement défini à chaque instant. Il s'agit alors d'un signal déterministe qui pourra être représenté par la fonction déterministe :

$$x(t) = \begin{cases} A \cos(2\pi f_0 t) & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

En particulier, si on observe simultanément  $n$  appareils identiques on obtiendra  $n$  fois le même résultat ou, ce qui est conceptuellement équivalent, si on répète  $n$  fois la même expérience avec le même appareil, on obtiendra  $n$  fois la même observation.

2<sup>ème</sup> cas : Au contraire, si au moment de la mise sous tension la phase initiale  $\phi_0$  du signal de sortie dépend d'un certain nombre de facteurs extérieurs (phase de la tension d'alimentation, caractéristiques différentes des composants etc...) , en observant  $n$  appareils du même type (mais macroscopiquement différents) ou en répétant  $n$  fois l'expérience avec le même (mais pour des phases de la tension d'alimentation différentes) on observera certainement des signaux différents (en fait des réalisations différentes d'un même phénomène). L'ensemble des causes extérieures auxquelles l'observateur n'a pas accès, ce que nous appellerons "le hasard", implique que  $\phi_0$  cette fois ne prend plus une valeur bien déterminée comme dans le 1<sup>er</sup> cas mais

une valeur aléatoire dans un certain intervalle. Ceci nous amène à considérer  $\phi_0$  comme une variable aléatoire, caractérisée par sa densité de probabilité dans un certain intervalle (on pourrait par exemple supposer  $\phi_0$  équirépartie dans l'intervalle  $[0, 2\pi]$ ). Pour marquer ceci on utilise parfois la notation suivante :  $\phi_0(\omega)$  où  $\omega$  fait référence à un évènement au sens probabiliste du terme ( $\omega$  : évènement associé au tirage aléatoire d'une phase initiale  $\phi_0$ ). Le signal, quant à lui, sera représenté par :

$$x(t, \omega) = \begin{cases} A \cos(2\pi f_0 t + \phi_0(\omega)) & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

où  $x(t, \omega)$  apparaît comme une fonction un peu particulière qui dépend à la fois de  $t$  : le temps mais également de  $\omega$  : le hasard et qu'à ce titre on appelle fonction ou processus aléatoire.

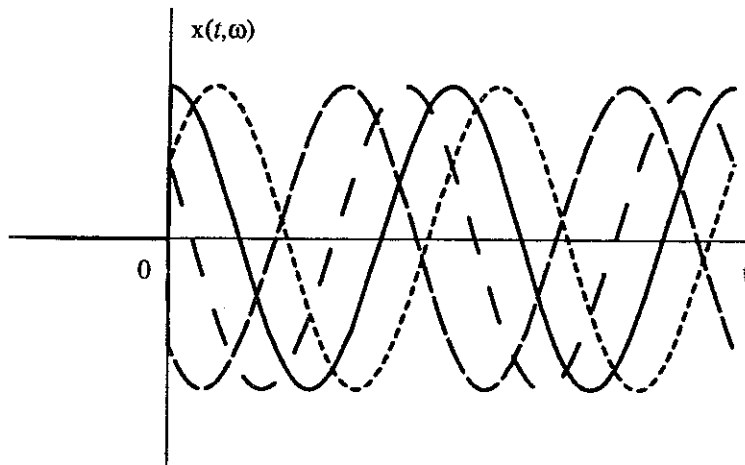


Figure : 4 réalisations ou trajectoires du processus aléatoire  $x(t, \omega)$

Revenons au cas général.

#### IV.1.1. Modélisation

L'exemple précédent nous montre qu'un processus aléatoire  $x(t, \omega)$  peut être considéré de deux façons distinctes :

- pour  $\omega = \omega_0$  fixé,  $x(t, \omega_0)$  apparaît comme une fonction ordinaire du temps et fournit une réalisation ou une trajectoire du phénomène.

- pour  $t = t_0$  fixé,  $x(t_0, \omega)$  est une variable aléatoire représentant toutes les valeurs que peut prendre le signal à l'instant  $t_0$ .

Pour étudier de tels processus on peut donc adopter deux points de vue :



- soit les étudier d'un point de vue temporel, c'est-à-dire étudier les fonctions  $x(t, \omega)$  pour divers  $\omega$  fixés.

- soit les étudier d'un point de vue statistique, c'est-à-dire étudier les variables aléatoires  $x(t, \omega)$  pour divers  $t$  fixés.

C'est ce que nous allons faire en commençant par calculer des moyennes ou moments.

#### IV.1.2. Moments temporels et moments statistiques

##### Moments temporels :

Etant donné  $x(t, \omega)$  : un processus aléatoire réel ou complexe et  $\omega_0$  étant fixé (c'est à dire pour une réalisation) on définit :

- le moment d'ordre 1 ou moyenne temporelle par :

$$\langle x(t, \omega_0) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t, \omega_0) dt$$

- le moment d'ordre 2 ou fonction d'autocorrélation temporelle par :

$$\langle x(t, \omega_0), \bar{x}(t - \tau, \omega_0) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t, \omega_0) \bar{x}(t - \tau, \omega_0) dt$$

Ces quantités, on le remarque, dépendent à priori de  $\omega_0$ , c'est à dire de la trajectoire choisie pour les calculer.

##### Moments statistiques :

Pour le même processus mais en fixant cette fois le temps  $t$ , on définit :

- la moyenne statistique du processus à l'instant  $t$  par :

$$E[x(t, \omega)] \triangleq \text{espérance mathématique de la variable aléatoire } x(t, \omega)$$

- la fonction d'autocorrélation statistique par :

$$R_{xx}(t, \tau) \triangleq E[x(t, \omega) \overline{x(t - \tau, \omega)}]$$

Ces quantités, quant à elles, dépendent à priori de  $t$ , c'est à dire de l'instant choisi pour les calculer.

Grâce à cette notion de moments nous allons pouvoir maintenant définir 2 propriétés importantes des signaux aléatoires : la *stationnarité* et l'*ergodicité*.

### IV.1.3. Stationnarité et ergodicité

Un processus aléatoire  $x(t, \omega)$ , que nous noterons dorénavant simplement  $x(t)$  comme précédemment, sera dit stationnaire au sens large (ou stationnaire au 2<sup>o</sup> ordre) s'il garde les mêmes propriétés statistiques au 1<sup>o</sup> et 2<sup>o</sup> ordre au cours du temps. En d'autres termes si :

-  $\forall t \quad E[x(t)] = \text{constante}$  (la moyenne statistique est indépendante du temps)  
 et si -  $\forall t \text{ et } \tau \quad R_{xx}(t, \tau) = E[x(t) x(t-\tau)]$  ne dépend que de  $\tau$

La fonction d'autocorrélation statistique est alors simplement notée  $R_{xx}(\tau)$ .

Un processus aléatoire  $x(t)$  sera dit ergodique si les moments temporels existent et sont indépendants de la réalisation choisie pour les calculer ou encore si les différentes réalisations possibles ont toutes les mêmes moments temporels.

Remarque : Les propriétés de stationnarité et d'ergodicité sont indépendantes.

Exemple : Signal sinusoïdal à phase aléatoire et équirépartie sur  $[0, 2\pi[$ .

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \Phi)$$

Le caractère aléatoire de  $x(t)$  est dû ici à la phase initiale  $\Phi$  qui prend une valeur au hasard dans  $[0, 2\pi[$  de façon uniforme. Le paramètre  $\Phi$  peut donc être considéré comme une variable aléatoire de densité de probabilité :

$$f_{\Phi}(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{si } \phi \in [0, 2\pi[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Etudions la stationnarité de  $x(t)$ .

- A l'ordre 1 :  $E[x(t)] = E[A \cos(2\pi f_0 t + \Phi)]$

soit, en appliquant le théorème de la moyenne,

$$E[x(t)] = A \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0 t + \phi) d\phi = 0$$

$E[x(t)]$  étant indépendant de  $t$ ,  $x(t)$  est stationnaire à l'ordre 1.

- A l'ordre 2 :  $R_{xx}(t, \tau) = E[x(t) x(t-\tau)]$

$$R_{xx}(t, \tau) = \frac{A^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0 t + \phi) \cos(2\pi f_0 (t - \tau) + \phi) d\phi$$

$$R_{xx}(t, \tau) = \frac{A^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} [\cos(2\pi f_0 (2t - \tau) + 2\phi) + \cos(2\pi f_0 \tau)] d\phi$$

$$R_{xx}(t, \tau) = \frac{A^2}{4\pi} \cos(2\pi f_0 \tau) \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

$R_{xx}(t, \tau)$  étant indépendant de  $t$ ,  $x(t)$  est donc stationnaire au sens large.

Etudions l'ergodicité de  $x(t)$ .

- A l'ordre 1 :  $\langle x(t, \phi) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \cos(2\pi f_0 t + \phi) dt$

$$\langle x(t, \phi) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{T} \left[ \frac{\sin(2\pi f_0 t + \phi)}{2\pi f_0} \right]_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{T} \left[ \frac{\sin(\pi f_0 T + \phi) + \sin(\pi f_0 T - \phi)}{2\pi f_0} \right] = 0$$

$\langle x(t, \phi) \rangle$  étant indépendant de  $\phi$ ,  $x(t)$  est ergodique à l'ordre 1.

- A l'ordre 2 :  $\langle x(t, \phi), x(t - \tau, \phi) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \cos(2\pi f_0 t + \phi) \cos(2\pi f_0 (t - \tau) + \phi) dt$

$$\langle x(t, \phi), x(t - \tau, \phi) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{2T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \cos(2\pi f_0 (2t - \tau) + 2\phi) dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \cos(2\pi f_0 \tau) dt \right]$$

$$\langle x(t, \phi), x(t - \tau, \phi) \rangle = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

$\langle x(t, \phi), x(t - \tau, \phi) \rangle$  étant indépendant de  $\phi$ ,  $x(t)$  est donc ergodique au sens large.

Le signal sinusoïdal à phase aléatoire et équirépartie sur  $[0, 2\pi[$  nous fournit donc un exemple de processus aléatoire à la fois stationnaire et ergodique au sens large et on peut remarquer dans cet exemple que les moments statistiques et temporels d'un même ordre sont égaux. Ceci n'est en fait que l'illustration d'une propriété générale. On montre en effet (théorème de Birkhoff) que si un processus aléatoire est à la fois stationnaire et ergodique jusqu'à un certain ordre alors les moments statistiques et temporels de même indice de ce processus sont égaux jusqu'à cet ordre. Ceci est expérimentalement très intéressant puisque ce théorème nous montre qu'il est possible d'avoir accès aux moments statistiques d'un processus aléatoire stationnaire et ergodique par l'observation d'une seule et unique réalisation, en théorie sur  $]-\infty, +\infty[$ , en pratique sur un temps suffisamment long (il eut fallu sinon observer de façon instantanée, soit un grand nombre de réalisations simultanées du processus, soit les réalisations réitérées un grand nombre de fois du même processus).

Puissance d'un signal aléatoire stationnaire et ergodique :

En adoptant à nouveau le double point de vue évoqué précédemment on pourrait, de façon générale, dans le cas d'un processus aléatoire quelconque, définir 2 types de puissance :

- la puissance moyenne temporelle d'une trajectoire (considérée comme un processus déterministe) par  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$  c'est à dire  $\langle x(t, \phi), x(t - \tau, \phi) \rangle_{\tau=0}$  : moment temporel

d'ordre 2 évalué en 0.

- la puissance moyenne instantanée à un instant "t" par  $E[|x(t)|^2] = R_{xx}(t, 0)$  : moment statistique d'ordre 2 évalué en 0 et représentant la moyenne statistique, sur toutes les trajectoires possibles, de la puissance à un instant particulier.

Dans le cas particulier d'un processus à la fois stationnaire au sens large et ergodique et compte tenu de l'égalité des moments d'ordre 2, on constate donc que ces 2 notions coïncident . Ceci nous permet alors de définir simplement la puissance moyenne d'un processus stationnaire et ergodique par :

$$P = E[|x(t)|^2] = R_{xx}(0)$$

ou

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

(pour une trajectoire quelconque)

Nous nous limiterons par la suite et sauf indication contraire à l'étude de tels processus (processus du 2° ordre).

Nous savons dorénavant évaluer la puissance ; il est cependant primordial de savoir caractériser la manière dont se répartit cette puissance dans le domaine fréquentiel (par exemple pour déterminer l'effet d'un filtrage sur le signal). La distribution de la puissance dans le domaine spectral nous sera donnée, comme précédemment par la notion de densité spectrale de puissance.

## IV.2. Densité spectrale de puissance des processus aléatoires du 2° ordre

Afin de ne pas alourdir l'exposé nous admettrons le théorème de Wiener-Kintchine :

La densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire du 2° ordre est égale à la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation statistique.

On retrouve donc la relation déjà obtenue pour les signaux déterministes :

$$\text{DSP} = S_{xx}(f) = \text{TF}[R_{xx}(\tau)](f)$$

### Exemple : Le bruit blanc

C'est un processus aléatoire  $b(t)$ , stationnaire au sens large et centré ( $E[b(t)] = 0$ ), dont la DSP  $S_{bb}(f)$  est constante dans l'ensemble du domaine fréquentiel. Cette constante est conventionnellement notée  $\frac{N_0}{2}$ .

On en déduit immédiatement que  $R_{bb}(\tau) = \text{TF}^{-1}[S_{bb}(f)](\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$

La puissance moyenne de ce signal est donc infinie! Il s'agit en fait d'un modèle mathématique et pratiquement nous assimilerons à un bruit blanc tout processus aléatoire stationnaire au sens large, centré et de DSP constante dans une bande de fréquence beaucoup plus large que celle dans laquelle nous travaillons (tout appareil de mesure, même le plus performant, ne peut fonctionner utilement que dans une bande de fréquence limitée).

Remarque concernant l'égalité  $R_{bb}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$

En supposant  $b(t)$  réel,  $R_{bb}(\tau) = E[b(t)b(t-\tau)]$

En rapprochant ces 2 égalités il apparaît donc que  $\forall \tau \neq 0 \quad E[b(t)b(t-\tau)] = 0$

soit  $E[b(t)b(t-\tau)] = E[b(t)] E[b(t-\tau)]$  puisque  $b(t)$  est centré.

En d'autres termes 2 valeurs (2 échantillons) de  $b(t)$  prises à des instants différents sont des variables aléatoires décorrélées. C'est la vision "temporelle" de la propriété de blancheur d'un signal.



## Enoncés d'exercices

### Exercice IV.1

On considère le processus aléatoire  $x(t) = a \cos(\omega_0 t + \phi)$ , où  $a$  et  $\omega_0$  sont des constantes et  $\phi$  est une variable aléatoire équirépartie sur  $[0, 2\pi]$ .

- 1 - Calculer  $E[x(t)]$  et  $\langle x(t) \rangle$ .
- 2 - Calculer  $E[x(t)x(t-\tau)]$  et  $\langle x(t)x(t-\tau) \rangle$ . Conclusion.
- 3 - Quelle est la densité spectrale de puissance  $S_{xx}(f)$  de  $x(t)$  ? La représenter graphiquement. Quelle est la puissance du signal ?

### Exercice IV.2

On considère le processus aléatoire  $x(t) = a \cos(\omega_0 t + \phi)$ , où  $a$  et  $\omega_0$  sont des constantes et  $\phi$  est une variable aléatoire équirépartie sur  $[0, \pi/2]$ .

- 1 - Quelles sont les expressions de la moyenne statistique d'ordre 1 et de la fonction d'autocorrélation statistique de ce signal ?
- 2 - Quelle conclusion peut-on en tirer sur la stationnarité de ce signal ?

### Exercice IV.3

Soit  $x(t)$  un processus aléatoire, stationnaire d'ordre 2, réel.

En partant de l'expression  $E[\{x(t+\tau) \pm x(t)\}^2]$ , montrer que l'on a pour la fonction d'autocorrélation :

$$|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0)$$

### Exercice IV.4

On considère le processus défini par les deux fonctions échantillons :

$$x(t) = a \quad \forall t \quad \text{avec } a = 1 \quad \text{avec la probabilité } p$$

$$\text{ou } a = 2 \quad \text{avec la probabilité } 1-p$$

- 1 - Calculer  $E[x(t)]$  et  $\langle x(t) \rangle$ .

2 - Calculer  $E[x(t)x(t-\tau)]$  et  $\langle x(t)x(t-\tau) \rangle$ .

Conclusion.

### Exercice IV.5

Soit  $x(t, \omega)$  le processus aléatoire défini de la manière suivante :

- Il ne prend que deux valeurs 0 ou 1.

- Les instants de transition (passage de 0 à 1 ou inversement) sont aléatoires et suivent une loi de Poisson : la probabilité d'avoir  $k$  transitions pendant un temps  $T$  ( $T > 0$ ) est donné par

$$\Pr(k, T) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}$$

où  $\lambda$  représente le nombre moyen de transition par unité de temps.

- à  $t = 0$  le processus vaut 0 avec la probabilité  $p$  ou 1 avec la probabilité  $1-p$ .

1 - Calculer  $E[x(t)]$ .

On rappelle que  $\operatorname{sh}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$  et  $\operatorname{ch}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

Pour quelle valeur de  $p$  le processus est-il stationnaire au 1<sup>o</sup> ordre ?

2 - On suppose la condition précédente remplie. Montrer que le processus est alors stationnaire au sens large.

Calculer sa densité spectrale de puissance.

### Exercice IV.6

Soit une suite  $\{b_k\}$  de variables aléatoires binaires indépendantes prenant la valeur 1 avec la probabilité  $p$  ou 0 avec la probabilité  $1-p$ .

1 - Calculer  $E[b_k]$ .

2 - On effectue un transcodage de la suite  $\{b_k\}$  en générant une nouvelle suite  $\{a_k\}$  définie par :

$$a_k = a_{k-1} \oplus b_k \quad (\oplus : \text{addition modulo 2})$$

Calculer  $E[a_k]$ , en admettant que la suite est stationnaire.

### Exercice IV.7

A -

On considère le signal 
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k g(t - kT - \theta) \quad (1)$$



•  $(a_k)_k$  est une suite de variables aléatoires discrètes, stationnaire au sens large; c'est à dire telle que :

$$E[a_k] = \text{constante} = m_a \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$E[a_k a_{k+n}] \text{ ne dépend que de } n \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (E[a_k a_{k+n}] \text{ sera alors noté } R_a(n))$$

•  $g(t)$  est un signal réel, déterministe, d'énergie finie, de fonction d'autocorrélation  $R_{gg}(\tau)$ , de transformée de Fourier  $G(f)$  et de densité spectrale d'énergie  $S_{gg}(f)$ .

•  $\theta$  est une variable aléatoire équirépartie sur  $[0, T[$  et indépendante de  $a_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

1 - Montrer que  $E[x(t)] = \frac{m_a}{T} G(0)$

$$\left( \text{on pourra utiliser le fait que } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{t-(k+1)T}^{t-kT} g(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) du \right)$$

2 - Montrer que  $E[x(t)x(t-\tau)] = \frac{1}{T} R_{gg}(\tau) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_a(n) \delta(\tau+nT)$

$$(E[x(t)x(t-\tau)] \text{ sera alors noté } R_{xx}(\tau))$$

3 - Que peut on conclure quant à la stationnarité de  $x(t)$  ?

On suppose à partir de maintenant que les variables aléatoires  $a_k$  sont 2 à 2 indépendantes i.e.  $\forall i \neq j \quad a_i$  et  $a_j$  sont indépendantes.

4 - Exprimer  $R_a(0)$  et  $R_a(n)$  pour  $n \neq 0$  en fonction de  $m_a$  et de  $\sigma_a^2 = \text{variance de } a_k$

5 - En déduire que si les  $a_k$  sont 2 à 2 indépendantes alors :

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} R_{gg}(\tau) * [m_a^2 \text{III}_T(\tau) + \sigma_a^2 \delta(\tau)]$$

et que la densité spectrale de puissance de  $x(t)$  est :

$$S_{xx}(f) = \frac{1}{T} S_{gg}(f) \cdot \left[ \frac{m_a^2}{T} \text{III}_{\frac{1}{T}}(f) + \sigma_a^2 \right] \quad (2)$$

**B** - L'expression (1) est utilisée pour modéliser les signaux numériques. La formule (2) permet alors de calculer la D.S.P. du signal numérique correspondant sous réserve que les différentes hypothèses faites en A pour établir cette formule soient vérifiées.

Nous allons maintenant appliquer ces résultats à 2 codes particuliers : le code binaire NRZ (non retour à zéro) et le code binaire RZ 50% (retour à zéro pendant la moitié du temps).

## I - Signal binaire NRZ.

Ce type de signal est caractérisé par :

- $a_k = \begin{cases} 1 & \text{avec la probabilité } p \\ 0 & \text{avec la probabilité } 1-p \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- les  $a_k$  sont 2 à 2 indépendants
- $g(t) = \forall \prod_{T} \left( t - \frac{T}{2} \right)$

1 - Dessiner, entre 0 et 5T la réalisation du processus  $x(t)$  correspondant à  $q = 0$  et à la séquence :

$$a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 1.$$

2 - Calculer  $S_{gg}(f)$ ,  $m_a$  et  $\sigma_a^2$  et en déduire  $S_{xx}(f)$ . Tracer le graphe de  $S_{xx}(f)$ .

## II - Signal binaire RZ 50%.

Pour ce type de signal les  $a_k$  ont les mêmes caractéristiques qu'en B - I et

$$g(t) = \forall \prod_{\frac{T}{2}} \left( t - \frac{T}{4} \right).$$

Répondre aux mêmes question qu'en B - I.

**Exercice IV.8 : Prédiction linéaire**

Soit  $x(t)$  un signal aléatoire réel, stationnaire au sens large et centré, de fonction d'autocorrélation  $R_{xx}(\tau)$  connue.

Connaissant  $x(t_0)$ , la valeur du signal à un instant " $t_0$ ", on se propose de prédire la valeur que prendra ce signal à un instant ultérieur " $t_0 + \theta$ " ( $\theta > 0$ ) grâce à une prédiction linéaire.

En d'autres termes, on cherche  $\tilde{x}(t_0 + \theta)$  : prédiction  $x(t_0 + \theta)$  sous la forme  $\tilde{x}(t_0 + \theta) = \lambda x(t_0)$

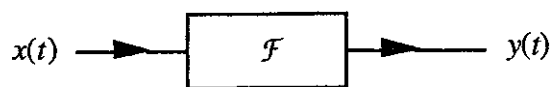
; l'erreur de prédiction étant alors :

$$\mathcal{E} = E \left[ \left\{ x(t_0 + \theta) - \tilde{x}(t_0 + \theta) \right\}^2 \right]$$

Exprimer  $\mathcal{E}$  sous la forme d'un trinôme de 2<sup>ème</sup> degré en  $\lambda$  et en déduire  $\lambda_0$  : la valeur de  $\lambda$  qui minimise l'erreur de prédiction ainsi que  $\tilde{x}(t_0 + \theta)$ .

## V. Filtrage linéaire et invariant dans le temps

Après avoir considéré la manière dont on pouvait modéliser les signaux dans les espaces "temps" et "fréquence", nous allons maintenant nous intéresser aux transformations que l'on peut faire subir à un signal. Ces opérations sont globalement désignées par le terme de filtrage et sont représentées schématiquement sous la forme d'une "boite noire".



$x(t)$ , le signal d'entrée, est aussi appelé le signal d'excitation du filtre.

$y(t)$ , le signal de sortie, est appelé la réponse du filtre à l'excitation  $x(t)$ .

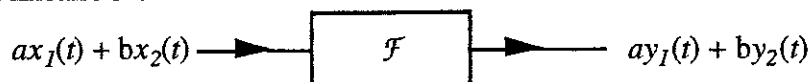
Le filtre modifie la forme du signal  $x(t)$  c'est à dire modifie la fonction  $x(\cdot)$ . La transformation opérée par le filtre peut donc être représentée mathématiquement par une fonctionnelle  $\mathcal{F}$  (i.e.  $y(\cdot) = \mathcal{F}[x(\cdot)]$ ). La réponse du filtre à l'excitation  $x(t)$  peut alors s'écrire sous la forme  $y(t) = \mathcal{F}[x(\cdot)](t)$ .

- Comme précédemment notre étude sera menée parallèlement en temps et en fréquence.

- Nous nous limiterons à une catégorie particulière de filtres : les filtres linéaires et invariants dans le temps (en abrégé FLIT).

### V.1. Définitions

- Un filtre est dit linéaire si :

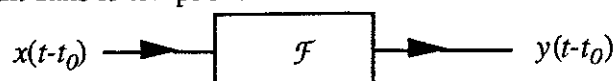


$y_1(t)$  et  $y_2(t)$  étant les réponses respectives aux excitations  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ .

En d'autres termes, un filtre est linéaire si la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  est linéaire :

$$\mathcal{F}[a x_1(\cdot) + b x_2(\cdot)](t) = a \mathcal{F}[x_1(\cdot)](t) + b \mathcal{F}[x_2(\cdot)](t)$$

- Un filtre est dit invariant dans le temps si :



En d'autres termes, si  $\mathcal{F}[x(-t_0)](t) = \mathcal{F}[x(\cdot)](t-t_0)$

Cette propriété signifie en particulier que le fonctionnement du filtre est indépendant de l'origine des temps choisie.

## V.2. Equations de fonctionnement d'un FLIT

### Equation de fonctionnement temporelle :

Nous allons chercher la forme générale de la relation qui lie le signal de sortie  $y(t)$  d'un FLIT au signal d'entrée  $x(t)$  c'est à dire la forme générale de la fonctionnelle  $\mathcal{F}$ .

Pour cela considérons tout d'abord le cas particulier où  $x(t) = \delta(t)$  l'impulsion de Dirac en  $t=0$  et appelons  $h(t)$  le signal de sortie correspondant.

$h(t) = \mathcal{F}[\delta(\cdot)](t)$  est appelée *réponse impulsionnelle* du filtre.

Nous allons voir par la suite que cette fonction est très importante car elle caractérise complètement et elle résume toutes les propriétés d'un FLIT.

Considérons maintenant un signal  $x(t)$  quelconque.

Nous avons vu que  $\delta(t)$  est l'élément neutre du produit de convolution donc :

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

$$\text{d'où } y(t) = \mathcal{F}[x(\cdot)](t) = \mathcal{F}[x(\cdot) * \delta(\cdot)](t) = \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(\cdot - \tau) d\tau\right](t)$$

$$\text{soit, par linéarité de } \mathcal{F} \quad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[x(\tau) \delta(\cdot - \tau)](t) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \mathcal{F}[\delta(\cdot - \tau)](t) d\tau$$

$$\text{soit, par invariance dans le temps } y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \mathcal{F}[\delta(\cdot)](t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

soit en définitive :

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t)} \quad [5.1]$$

La fonctionnelle  $\mathcal{F}$  est donc la convolution par la réponse impulsionnelle du filtre. On dit aussi que le fonctionnement (temporel) d'un filtre LIT est régi par un opérateur de convolution.

Considérons maintenant l'aspect fréquentiel.

Equation de fonctionnement fréquentielle :

En supposant que  $x(t)$  et  $h(t)$  possèdent des transformées de Fourier respectives  $X(f)$  et  $H(f)$  et en appliquant la transformée de Fourier à l'équation précédente on voit que  $y(t)$  admet également une transformée de Fourier telle que :

$$\boxed{Y(f) = X(f) \cdot H(f)} \quad [5.2]$$

La fonction  $H(f)$ , transformée de Fourier de  $h(t)$  est appelée la fonction de transfert du filtre LIT.

Remarque :  $H(f)$ , la fonction de transfert d'un FLIT est en principe une fonction complexe.

- son module,  $|H(f)|$ , est appelé l'amplitude ou le gain (en fréquence) du filtre
- son argument,  $\text{Arg}[H(f)]$ , est appelé la phase du filtre.

Exemple : Soit un filtre LIT de réponse impulsionnelle  $h(t)$  que nous supposons réelle et de fonction de transfert  $H(f)$ . Appliquons à l'entrée de ce filtre un signal sinusoïdal  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$  et calculons l'expression du signal de sortie  $y(t)$  correspondant.

Pour cela considérons le problème en fréquence :

$$X(f) = \frac{A}{2} [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$$

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f) = \frac{A}{2} [H(f) \delta(f-f_0) + H(f) \delta(f+f_0)]$$

$$Y(f) = \frac{A}{2} [H(f_0) \delta(f-f_0) + H(-f_0) \delta(f+f_0)]$$

or  $h(t)$  étant réelle, sa transformée de Fourier  $H(f)$  a la propriété de symétrie hermitienne :

donc  $H(-f_0) = \overline{H(f_0)}$  d'où :

$$Y(f) = \frac{A}{2} [H(f_0) \delta(f-f_0) + \overline{H(f_0)} \delta(f+f_0)]$$

$$Y(f) = \frac{A}{2} |H(f_0)| [e^{i\text{Arg}[H(f_0)]} \delta(f-f_0) + e^{-i\text{Arg}[H(f_0)]} \delta(f+f_0)]$$

en appliquant maintenant la transformée de Fourier inverse il vient :

$$y(t) = \frac{A}{2} |H(f_0)| [e^{i\text{Arg}[H(f_0)]} e^{i2\pi f_0 t} + e^{-i\text{Arg}[H(f_0)]} e^{-i2\pi f_0 t}]$$

$$y(t) = \frac{A}{2} |H(f_0)| [e^{i(2\pi f_0 t + \text{Arg}[H(f_0)])} + e^{-i(2\pi f_0 t + \text{Arg}[H(f_0)])}]$$

soit enfin :  $y(t) = A |H(f_0)| \cos(2\pi f_0 t + \text{Arg}[H(f_0)])$

Cet exemple nous conduit à faire les remarques suivantes :

- Un filtre LIT n'affecte pas la forme des signaux sinusoïdaux. Un signal sinusoïdal à l'entrée reste sinusoïdal à la sortie et de même fréquence.
- Pour ce type particulier de signal, le filtre se contente d'en modifier l'amplitude par application d'un coefficient constant ( $|H(f_0)|$  : la valeur de son gain à la fréquence de la sinusoïde) et d'introduire un déphasage ( $\text{Arg}[H(f_0)]$  : la valeur de sa phase à cette même fréquence). Ce déphasage pouvant être interprété comme un retard  $t_0 = -\frac{\text{Arg}[H(f_0)]}{2\pi f_0}$ .
- Pour obtenir un résultat dans le domaine temporel il est souvent plus commode d'effectuer les calculs dans le domaine fréquentiel comme nous l'avons fait dans cet exemple (le produit de convolution devient un produit simple).

### V.3. Propriétés d'un filtre LIT

#### V.3.1. Causalité

Définissons tout d'abord la notion de filtre réalisable.

Un filtre LIT est dit réalisable si :

- 1) d'une part, la réponse du filtre à tout signal réel est réelle ou, ce qui est équivalent, si  $h(t)$  est réelle.
- 2) si d'autre part, la réponse de filtre ne précède pas l'excitation (on dit alors que le filtre est causal).

Dire que le filtre est causal c'est dire que pour tout signal  $x(t)$  nul pour tout  $t < t_0$  (i.e.  $x(t) = x(t) u(t-t_0)$  où  $u(t)$  désigne la fonction échelon unité de Heaviside) la réponse  $y(t)$  est elle aussi nulle pour tout  $t < t_0$ .

#### Proposition :

Un filtre LIT est causal  $\Leftrightarrow h(t)$  est nulle pour tout  $t < 0$  (i.e.  $h(t)$  est une fonction causale).

#### Démonstration :

Le sens direct de l'implication est évident :

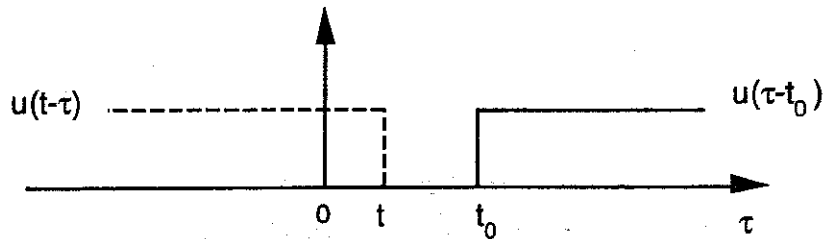
Le filtre est causal et  $\delta(t) = 0$  pour tout  $t < 0$  donc  $h(t) = 0$  pour tout  $t < 0$  également.

Voyons la réciproque :

Supposons  $h(t)$  causale :  $h(t) = h(t) u(t)$  et soit une excitation  $x(t)$  nulle pour tout  $t < t_0$  :

$x(t) = x(t) u(t-t_0)$ , alors  $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$

soit  $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) u(\tau-t_0) h(t-\tau) u(\tau-t) d\tau$



or, pour tout  $t < t_0$ ,  $u(\tau-t_0) u(t-\tau) = 0$ , l'intégrale est donc nulle dans ce cas et  $y(t)=0$  pour tout  $t < t_0$ . Le filtre est donc causal.

Remarque concernant la causalité :

En reprenant la relation  $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$  et en supposant le filtre

causal on a donc  $h(t) = 0$  pour  $t < 0$

soit  $h(t-\tau) = 0$  pour  $t-\tau < 0$  soit pour  $\tau > t$

donc  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t-\tau) d\tau$  ce qui montre que  $y(t)$  ne dépend que des valeurs du signal

d'entrée antérieures à  $t$ .

### V.3.2. Stabilité

On dit qu'un filtre LIT est stable si à toute entrée bornée correspond une sortie bornée.

Proposition :

(a) : Un filtre LIT est stable  $\Leftrightarrow$  (b) :  $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < +\infty$ .

Démonstration :

- La condition est suffisante :  $b \Rightarrow a$ , en effet :

Soit  $x(t)$  un signal d'entrée borné i.e. tel que  $|x(t)| < M$  pour tout  $t$ .

Alors  $|y(t)| < \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)| |h(t-\tau)| d\tau < M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| d\tau < +\infty$  pour tout  $t$ .

- La condition est nécessaire :  $a \Rightarrow b$

Pour cela nous allons montrer que (non b)  $\Rightarrow$  (non a).

Supposons donc que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau = +\infty$  et montrons qu'il existe une excitation bornée à laquelle corresponde une réponse non bornée.

Considérons par exemple l'excitation  $x(t) = \text{sgn}[h(-t)]$  où  $\text{sgn}$  désigne la fonction "signe de".

$$x(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } h(-t) \geq 0 \\ -1 & \text{si } h(-t) < 0 \end{cases} \quad \text{donc } x(t) \text{ est bien un signal borné.}$$

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \text{sgn}[h(-t+\tau)] d\tau$  et évaluons  $y(0)$  : valeur de la sortie à  $t=0$ .

$$y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \operatorname{sgn}[h(\tau)] d\tau \quad \text{or} \quad h(\tau) \operatorname{sgn}[h(\tau)] = |h(\tau)| \quad \text{donc}$$

$$y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau = +\infty \quad \text{donc } y(t) \text{ n'est pas borné et par suite le filtre n'est pas stable.}$$

#### V.4. Distorsion

Il peut être intéressant de regarder à quelles conditions un filtre LIT ne distord pas un signal qui le traverse.

On dit qu'un filtre est sans distorsion s'il ne modifie pas la "forme générale" de n'importe quel signal appliqué l'entrée, c'est à dire s'il se contente de le multiplier par un coefficient constant et/ou de le retarder d'un temps constant. En d'autres termes, si pour tout signal d'entrée  $x(t)$ , le signal de sortie est de la forme  $y(t) = A x(t-t_0)$ , avec  $A$  et  $t_0$  : des constantes.

En appliquant la transformée de Fourier à cette dernière relation, il vient :

$$Y(f) = A e^{-i2\pi f t_0} X(f)$$

ce qui montre que la fonction de transfert d'un filtre sans distorsion est de la forme :

$$H(f) = A e^{-i2\pi f t_0}$$

c'est à dire :

- que son amplitude :  $|A|$  doit être constante sur l'ensemble du domaine fréquentiel
- que sa phase :  $-2\pi f t_0$  doit être linéaire par rapport à la fréquence là encore sur l'ensemble du domaine fréquentiel.

On remarque en particulier que le support de la fonction de transfert d'un filtre sans distorsion doit être infini, ce qui pratiquement est illusoire.

De façon pratique on sera en fait amené à considérer des filtres ne distordant pas les signaux mais dans une bande fréquences donnée. On parlera alors de filtre passe-bas, passe-haut ou passe-bande idéal.

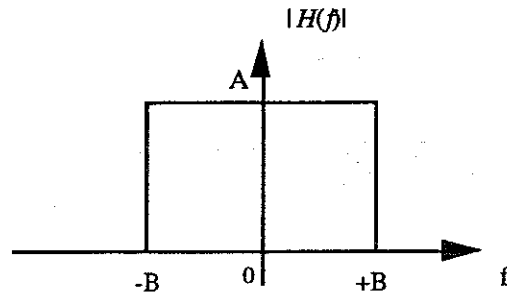


### V.4.1. Filtre passe-bas idéal

La fonction de transfert d'un tel filtre sera de la forme :

$$H(f) = \begin{cases} A e^{-i2\pi f t_0} & \text{si } f \in [-B, +B] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

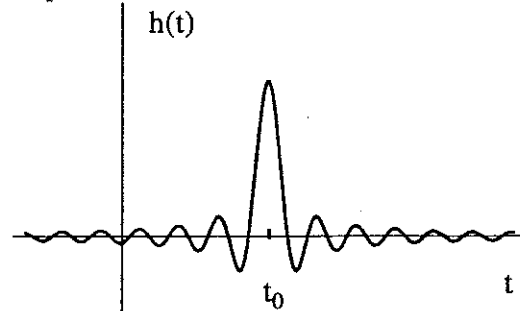
(B est la fréquence de coupure du filtre)



c'est à dire :  $H(f) = A \Pi_{2B}(f) e^{-i2\pi f t_0}$

on en déduit la réponse impulsionnelle d'un tel filtre par  $TF^{-1}$  :

$$h(t) = 2 AB \text{sinc}[2\pi B(t-t_0)]$$



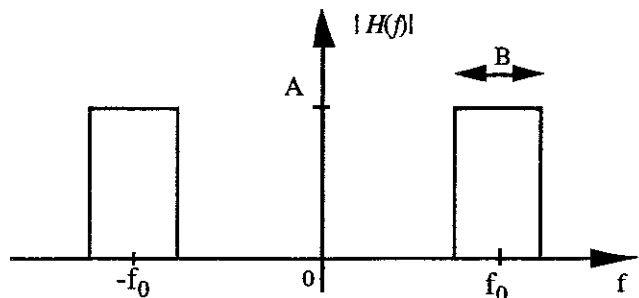
Remarque : La fonction  $h(t)$  n'étant pas causale, le filtre ne l'est pas non plus et, par suite, il n'est théoriquement pas réalisable.

### V.4.2. Filtre passe-bande idéal

La fonction de transfert de ce type de filtre sera de la forme :

$$H(f) = A [\Pi_B(f-f_0) + \Pi_B(f+f_0)] e^{-i2\pi f t_0}$$

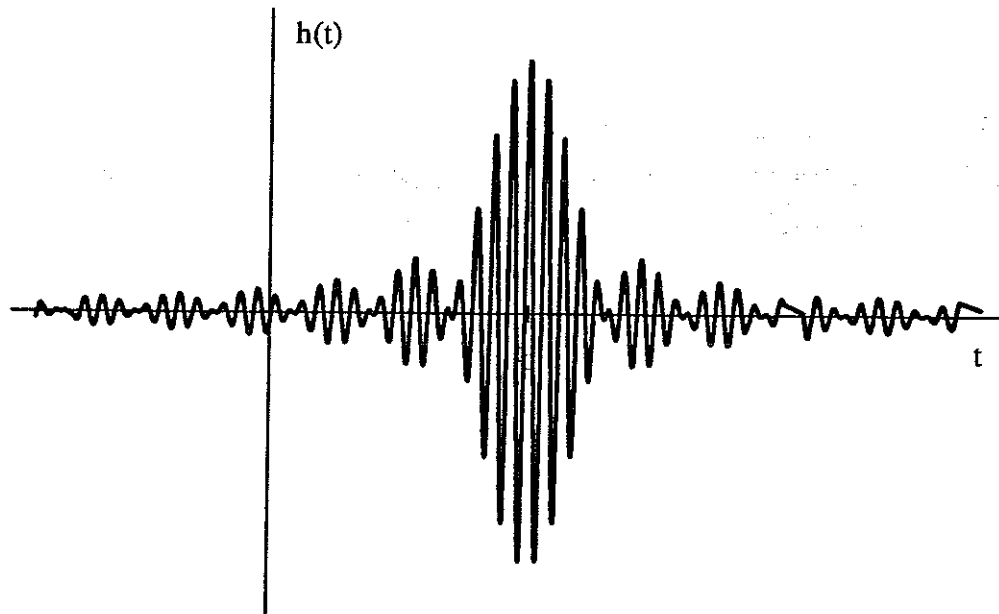
(B est la bande passante du filtre)



on en déduit la réponse impulsionnelle d'un tel filtre par  $TF^{-1}$  :

$$h(t) = AB [\text{sinc}(\pi B t) e^{+i2\pi f t_0} + \text{sinc}(\pi B t) e^{-i2\pi f t_0}] * \delta(t-t_0)$$

soit  $h(t) = 2AB [\text{sinc}(\pi Bt) \cos(2\pi f_0 t)] * \delta(t-t_0)$

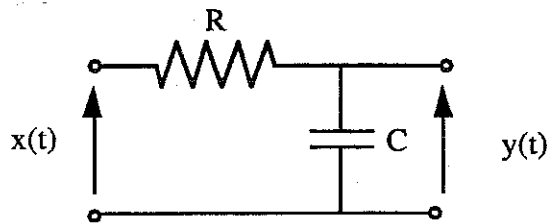


Remarque : La fonction  $h(t)$  n'étant pas causale, le filtre ne l'est pas non plus et, par suite, il n'est théoriquement pas réalisable.

## Enoncés d'exercices

### Exercice V.1

On considère le filtre RC suivant :



On posera  $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$

1 - Quelle est la fonction de transfert  $H(f)$  de ce filtre (on établira les équations différentielles qui régissent le fonctionnement du filtre en supposant  $x(t)$  déterministe de TF  $X(f)$  ).

A partir de  $H(f)$ , et sachant que  $\text{TF}[u(t) e^{-\alpha t}] = \frac{1}{\alpha + 2i\pi f}$  où  $u(t)$  désigne la fonction échelon

unité, déterminer la réponse impulsionnelle  $h(t)$  du filtre.

2 - Quelle est la nature du filtre ? Est-il causal ? Est-il stable ?

### Exercice V.2

Un signal  $x(t)$  dont le spectre est limité à la bande  $[-B, +B]$  traverse un filtre dont la fonction de transfert est donnée par  $H(f) = |H(f)| e^{i\phi(f)}$  avec

$$H(f) = \left( A + \alpha \cos \frac{\pi f}{B} \right) e^{-i2\pi f t_0} \quad \text{si } |f| \leq B \quad \text{avec } 0 < \alpha < A \quad \text{et } t_0 > \frac{1}{2B}$$

et  $H(f) = 0$  si  $|f| > B$

Donner l'expression du signal  $y(t)$  à la sortie du filtre en fonction du signal d'entrée  $x(t)$ . A l'aide d'un schéma, interpréter physiquement le résultat.

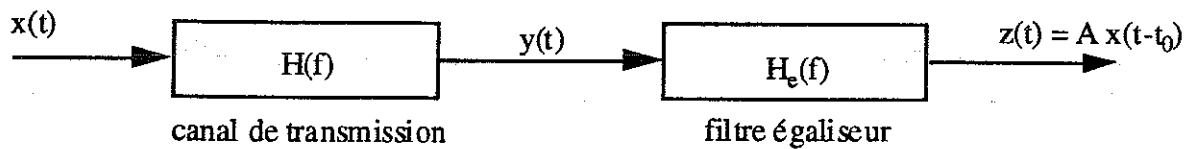
### Exercice V.3

Un signal  $x(t)$  est transmis à travers un canal et le signal reçu  $y(t)$  est de la forme :

$$y(t) = A x(t - t_0) + \alpha x(t - t_1) \quad \text{où } \alpha \ll A \quad \text{et } t_0 < t_1$$

Déterminer la fonction de transfert du canal et représenter sommairement son module.

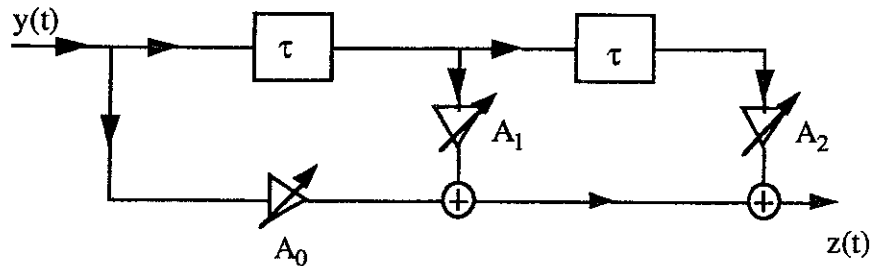
Ce canal a introduit une distorsion sur le signal émis  $x(t)$ . On désire éliminer cette distorsion en intercalant à la réception un filtre dit "égaliseur de fonction", de fonction de transfert  $H_e(f)$  telle que l'on ait :



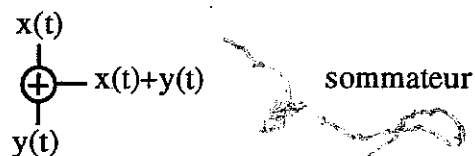
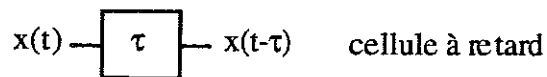
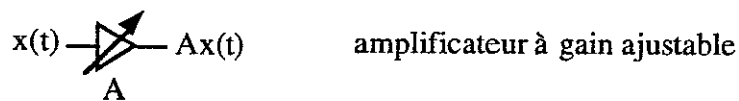
1 - Calculer la fonction de transfert de l'ensemble : canal de transmission et filtre égaliseur.

2 - En déduire  $H_e(f)$ .

3 - En utilisant le fait que  $\frac{\alpha}{A} \ll 1$  et en faisant un développement limité de  $H_e(f)$ , montrer que l'on peut réaliser approximativement l'égalisation à l'aide d'un filtre, dit filtre transverse, constitué d'une ligne à retard pondérée à deux prises :



avec :



## VI. Filtrage des signaux

---

Nous allons considérer dans ce chapitre l'effet d'un filtre LIT stable sur les différentes catégories de signaux définies précédemment. En particulier nous chercherons les relations qui lient les densités spectrales d'énergie ou de puissance des signaux d'entrée et de sortie du filtre.

### VI. Filtrage des signaux déterministes

#### VI.1. Signaux d'énergie finie

Soit  $x(t)$  un signal déterministe d'énergie finie, de densité spectrale de puissance  $S_{xx}(f) = |X(f)|^2$  (cf chapitre 3) et soit  $y(t)$  le signal de sortie du filtre.

De la relation [5.2] on déduit que  $|Y(f)|^2 = |X(f)|^2 |H(f)|^2$

Montrons que  $y(t)$  est un signal déterministe d'énergie finie.

Le signal  $y(t)$  résulte d'une transformation déterministe appliquée à un signal déterministe. Il est donc déterministe lui-même. Calculons son énergie  $E_y$ .

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df \quad \text{d'après le th. de Parseval}$$

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 |H(f)|^2 df$$

d'autre part,  $|H(f)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i2\pi ft} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt \leq M < +\infty$  puisque le filtre est supposé stable.

$$\text{donc } E_y \leq M^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df < +\infty$$

donc le signal  $y(t)$  est d'énergie finie.

On constate en outre que sa densité spectrale d'énergie  $S_{yy}(f) = |Y(f)|^2$  est donnée par :

$$\boxed{S_{yy}(f) = S_{xx}(f) |H(f)|^2}$$

## VL.2. Signaux de puissance finie

On suppose maintenant  $x(t)$  déterministe et de puissance moyenne finie. Nous ne pouvons cette fois utiliser  $X(f)$ , la TF de  $x(t)$ , car nous ne sommes pas assurés de son existence (cf chapitre 3). Nous nous servirons donc de la fonction d'autocorrélation du signal :

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \overline{x(t-\tau)} dt$$

de laquelle on déduit, rappelons le, la DSP du signal :  $S_{xx}(f)$  par transformation de Fourier.

Calculons donc la fonction d'autocorrélation du signal de sortie  $y(t)$  en le supposant de puissance finie (nous justifierons cette hypothèse préalable à la fin du calcul).

$$R_{yy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} y(t) \overline{y(t-\tau)} dt \quad \text{or} \quad y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) x(t-u) du \quad \text{donc}$$

$$R_{yy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) x(t-u) du \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(v) x(t-\tau-v)} dv \right] dt$$

$$R_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \overline{h(v)} \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t-u) \overline{x(t-\tau-v)} dt \right] dv du$$

or, la quantité entre crochets n'est autre que  $R_{xx}(\tau-u+v)$  donc

$$R_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \overline{h(v)} R_{xx}(\tau-u+v) dv du$$

Dans cette intégrale double effectuons le changement de variables défini par :

$$\begin{cases} u = u \\ w = u - v \end{cases} \quad \text{de Jacobien } J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} = 1 & \frac{\partial u}{\partial w} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial u} = 1 & \frac{\partial v}{\partial w} = -1 \end{vmatrix} = -1 \quad \text{soit}$$

$$R_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \overline{h(u-w)} R_{xx}(\tau-w) |J| dw du = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \overline{h(u-w)} du \right] R_{xx}(\tau-w) dw$$

$$\text{soit en posant : } R_{hh}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \overline{h(u-w)} du$$

quantité qui sera par définition la fonction d'autocorrélation du filtre (ou, plus précisément, de sa réponse impulsionnelle).

$$R_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{hh}(w) R_{xx}(\tau-w) dw \quad (\text{on reconnaît un produit de convolution})$$

On obtient donc en définitive :

$$\boxed{R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau) * R_{hh}(\tau)}$$

$$\boxed{\text{avec } R_{hh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \overline{h(u-\tau)} du \text{ la fonction d'autocorrélation du filtre}}$$

**Remarque :** Il est à noter que l'on obtient encore la même forme de relation temporelle entre la sortie et l'entrée du filtre (produit de convolution) mais faisant intervenir cette fois les fonctions d'autocorrélation des signaux. On peut intuitivement se douter qu'il en ira de même pour les processus aléatoires du 2<sup>o</sup> ordre. Nous le démontrerons dans la suite.

Intéressons nous maintenant à l'aspect fréquentiel.

La densité spectrale de puissance  $S_{yy}(f)$  de  $y(t)$  est obtenue en appliquant la TF à  $R_{yy}(\tau)$  :

$$S_{yy}(f) = \text{TF}[R_{hh}(\tau) * R_{xx}(\tau)](f) = \text{TF}[R_{hh}(\tau)](f) \text{TF}[R_{xx}(\tau)](f)$$

$$\text{or } \text{TF}[R_{xx}(\tau)](f) = S_{xx}(f)$$

$$\text{et comme d'autre part } R_{hh}(\tau) = h(\tau) * \overline{h(-\tau)} \quad \text{TF}[R_{hh}(\tau)](f) = H(f) \overline{H(f)} = |H(f)|^2$$

donc :

$$\boxed{S_{yy}(f) = S_{xx}(f) |H(f)|^2}$$

Il reste maintenant à justifier notre hypothèse préalable selon laquelle  $y(t)$  est de puissance finie.

Calculons donc la puissance  $P_y$  de  $y(t)$ .

$$P_y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{yy}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 S_{xx}(f) df \leq M^2 \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df = M^2 P_x < +\infty$$

## VII. Filtrage des signaux aléatoires

Nous supposons maintenant  $x(t)$ , l'excitation, aléatoire et stationnaire au sens large.

### VII.1. Propriétés statistique du signal filtré

Désignons toujours par  $y(t)$  le signal de sortie du filtre.

- Calculons sa moyenne statistique :

$$E[y(t)] = E[x(t) * h(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x(t-u)du\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[h(u)x(t-u)]du = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)E[x(t-u)]du$$

car, d'une part l'espérance mathématique est linéaire et d'autre part  $h$  est déterministe. Enfin,  $x(t)$  étant supposé stationnaire au sens large,  $E[x(t-u)] = E[x(t)] = \text{constante}$ , doù :

$$E[y(t)] = E[x(t)] \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)du = E[x(t)]H(0) = \text{constante (donc indépendant de } t)$$

Donc  $y(t)$  est stationnaire au 1<sup>o</sup> ordre et

$$\boxed{E[y(t)] = E[x(t)]H(0)}$$

- Calculons sa fonction d'autocorrélation statistique :

$$R_{yy}(t, \tau) = E[y(t)y(t-\tau)] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x(t-u)du \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(v)x(t-\tau-v)} dv\right]$$

$$R_{yy}(t, \tau) = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x(t-u)\overline{h(v)x(t-\tau-v)} du dv\right]$$

$$R_{yy}(t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\overline{h(v)}E[x(t-u)\overline{x(t-\tau-v)}] du dv$$

or  $E[x(t-u)\overline{x(t-\tau-v)}] = R_{xx}(\tau-u+v)$  d'où

$$R_{yy}(t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\overline{h(v)}R_{xx}(\tau-u+v) du dv$$

"t" ayant disparu du 2° membre, il disparaît aussi du 1<sup>er</sup> ce qui justifie l'écriture en  $R_{yy}(\tau)$  et prouve simultanément la stationnarité au sens large de  $y(t)$ .

enfin en effectuant le même changement de variables que dans le paragraphe précédent :

$$\begin{cases} u = u \\ w = u - v \end{cases} \text{ de Jacobien } J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} = 1 & \frac{\partial u}{\partial w} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial u} = 1 & \frac{\partial v}{\partial w} = -1 \end{vmatrix} = -1 \quad \text{il vient}$$

$$R_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\overline{h(u-w)}R_{xx}(\tau-w) |J| dw du = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\overline{h(u-w)} du \right] R_{xx}(\tau-w) dw$$

soit  $R_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{hh}(w)R_{xx}(\tau-w) dw$  soit en définitive :

$$\boxed{R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau) * R_{hh}(\tau)} \quad [\text{VI. 2}]$$

En résumé, si le signal d'entrée du filtre est aléatoire et stationnaire au sens large, le signal de sortie l'est également.

## VII.2. Densité spectrale de puissance

En appliquant la transformée de Fourier à la relation [VI. 2], il vient :

$$\boxed{S_{yy}(f) = S_{xx}(f) |H(f)|^2} \quad [\text{VI. 3}]$$

## VII.3. Théorème des interférences

Avant de quitter ce paragraphe consacré au filtrage des signaux aléatoires nous allons voir un dernier ensemble de relations, généralisant les relations précédentes, et connues sous le terme de "formules" ou "théorème" des interférences.



Ces relations, plus générales car faisant intervenir la fonction d'intercorrélation des signaux, se révèlent souvent fort utiles dans l'étude d'un signal composite, c'est à dire composé de plusieurs signaux.

Commençons tout d'abord par définir la fonction d'intercorrélation de deux signaux aléatoires.

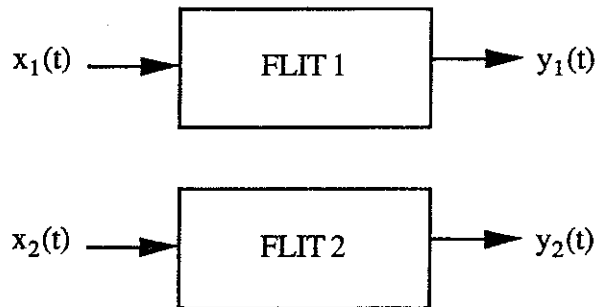
Etant donnés deux processus aléatoires  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  on définit leur fonction d'intercorrélation que l'on notera  $R_{x_1x_2}(t,\tau)$  par :

$$R_{x_1x_2}(t,\tau) \triangleq E[x_1(t) x_2(t-\tau)]$$

Ces deux processus seront dits mutuellement stationnaires si et seulement si leur fonction d'intercorrélation est indépendante de l'origine des temps, autrement dit si  $R_{x_1x_2}(t,\tau)$  est indépendant de "t". Notons que dans ce cas  $R_{x_1x_2}(\tau) = R_{x_2x_1}(-\tau)$ .

Si deux processus aléatoires sont mutuellement stationnaires,  $S_{x_1x_2}(f)$  : la TF de  $R_{x_1x_2}(\tau)$  est appelée *densité interspectrale de puissance* ou *interspectre* de ces processus.

Considérons maintenant la situation représentée par le schéma suivant :



$x_1(t)$  et  $x_2(t)$  sont 2 processus aléatoires mutuellement stationnaires

FLIT 1 et FLIT 2 sont 2 filtres linéaires et invariants dans le temps de fonctions de transfert respectives  $H_1(f)$  et  $H_2(f)$  et de réponses impulsionnelles respectives  $h_1(t)$  et  $h_2(t)$ .

Grâce à une démonstration analogue à celle faite précédemment on montre que :

$y_1(t)$  et  $y_2(t)$  sont également mutuellement stationnaires

$$R_{y_1y_2}(\tau) = R_{x_1x_2}(\tau) * R_{h_1h_2}(\tau)$$

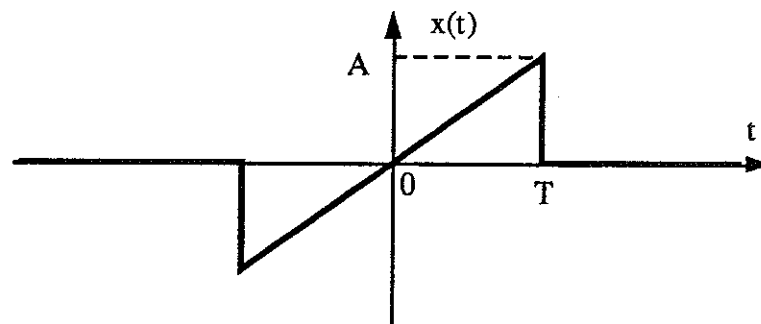
avec  $R_{h_1h_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t) \overline{h_2(t-\tau)} dt$

$$S_{y_1y_2}(f) = S_{x_1x_2}(f) H_1(f) \overline{H_2(f)}$$

## Enoncés d'exercices

### Exercice VI.1

Soit le signal  $x(t) = \begin{cases} \frac{At}{T} & \text{si } -T \leq t \leq +T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad A > 0$

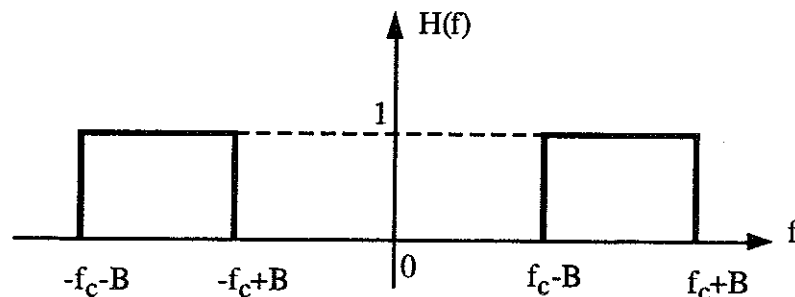


On périodise ce signal tous les  $2T$  et on obtient le signal :

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - 2kT)$$

- 1 - Calculer  $X(f)$  et donner sa valeur en  $f = 0$ .
- 2 - Calculer  $Y(f)$ .
- 3 - On filtre le signal  $y(t)$  par un filtre passe-bande idéal tel que :

$$|H(f)| = \begin{cases} 1 & \text{pour } f \in [f_c - B, f_c + B] \cup [-f_c - B, -f_c + B] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$f_c = \frac{3}{T} \quad B = \frac{1}{3T}$$

Déterminer le signal  $z(t)$  en sortie du filtre.

**Exercice VI.2**

On présente à l'entrée du filtre passe-bas RC étudié précédemment (exercice V.1), un signal

$$x(t) = e(t) + b(t)$$

$e(t)$  est un signal utile de la forme  $e(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$

$\phi$  est une variable aléatoire équirépartie sur  $[0, 2\pi]$

$$f_0 = f_c = \frac{1}{2\pi RC} \quad (\text{fréquence de coupure du filtre})$$

$b(t)$  est un bruit blanc de  $DSP = \frac{N_0}{2}$ , stationnaire d'ordre 2, centré et indépendant de  $e(t)$ .

Calculer le rapport  $\frac{S}{B} = \frac{\text{puissance du signal utile}}{\text{puissance du bruit}}$  en sortie du filtre.

**Exercice VI.3**

On considère le signal  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) + b(t)$  où :

$A$  et  $f_0$  sont des constantes,

$\phi$  est une variable aléatoire équirépartie sur  $[0, 2\pi]$ ,

$b(t)$  est un bruit blanc, stationnaire d'ordre 2, centré, de densité spectrale de puissance

$$S_{bb}(f) = \frac{N_0}{2} \text{ W/Hz.}$$

Les deux processus  $A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$  et  $b(t)$  sont indépendants.

On définit le signal  $y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(u) du$  où  $T \neq \frac{1}{f_0}$

1 - Montrer que  $y(t)$  correspond au signal de sortie d'un filtre linéaire excité par  $x(t)$ , filtre dont on représentera la réponse impulsionnelle  $h(t)$ .

Ce filtre est-il causal ? Est-il stable ?

2 - Calculer la densité spectrale de puissance  $S_{yy}(f)$  du signal  $y(t)$ .

3 - En déduire la fonction d'autocorrélation  $R_{yy}(\tau)$ .

On donne  $TF^{-1}[\text{sinc}^2 \pi f T] = \frac{1}{T} \Lambda_{2T}(\tau)$ , où  $\Lambda_{2T}(\tau)$  représente une "impulsion" triangulaire de

largeur totale  $2T$ , centrée en 0 et d'amplitude maximale égale à 1.

4 - Calculer la puissance  $P_y$  du signal  $y(t)$  en utilisant deux méthodes.

(Pour l'une, on utilisera l'égalité de PARSEVAL).

**Exercice VI.4**

On considère un filtre de réponse impulsionnelle :  $h(t) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{\pi t^2}{\theta^2}\right)$  ( $\theta > 0$ )

1 - Ce filtre n'est pas causal. Pourquoi ?

Est-il stable ?

On donne :  $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-Ax^2 \pm 2Bx + C) dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp\left(-\frac{AC - B^2}{A}\right)$

2 - Bien que ce filtre ne soit pas causal, on peut toujours l'étudier en temps différé et faire abstraction du problème de causalité. On admet donc que la réponse  $h(t) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{\pi t^2}{\theta^2}\right)$

est valide.

Ce filtre est excité par un signal déterministe  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$  où  $A$  et  $f_0$  sont des constantes, auquel se superpose un bruit blanc  $b(t)$ , additif, centré de DSP  $\frac{N_0}{2}$ .

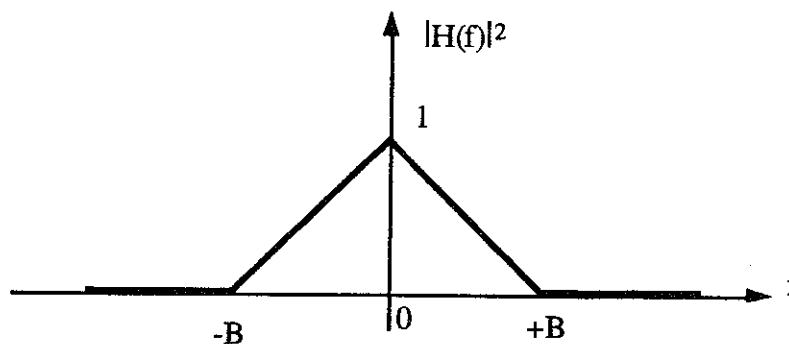
Quelle est l'expression de la fonction de transfert du filtre ?

Quelle sont, en sortie du filtre, les puissances du signal utile et du bruit ?

3 - En déduire l'expression du rapport signal/bruit en sortie. Ce rapport s'améliore-t-il en BF ou en HF ?

**Exercice VI.5**

On considère un filtre linéaire et invariant dans le temps de réponse impulsionnelle  $h(t)$ , de fonction de transfert  $H(f)$  réelle et positive et telle que  $|H(f)|^2$  soit la fonction triangle  $\Lambda_{2B}(f)$ .



1 - On applique à l'entrée de ce filtre un bruit  $b(t)$ , stationnaire au deuxième ordre et de moyenne  $E[b(t)] = M$ .

Déterminer à partir de  $|H(f)|^2$  la moyenne  $E[b'(t)]$  du bruit de sortie  $b'(t)$ .

2 - On suppose maintenant le bruit centré ( $E[b(t)] = 0$ ) et de fonction d'autocorrélation

$$R_{bb}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau).$$

Sachant que  $TF[\Lambda_{2T}(t)] = \frac{\sin^2(\pi f T)}{\pi^2 f^2 T}$ , déterminer la fonction d'autocorrélation  $R_{b'b'}(\tau)$  du bruit

de sortie  $b'(t)$ . En déduire la puissance  $P_{b'}$  du bruit de sortie.

3 - Sans passer par le domaine temporel, retrouver la valeur de  $P_{b'}$ .

**Exercice VI.6** Filtre adapté

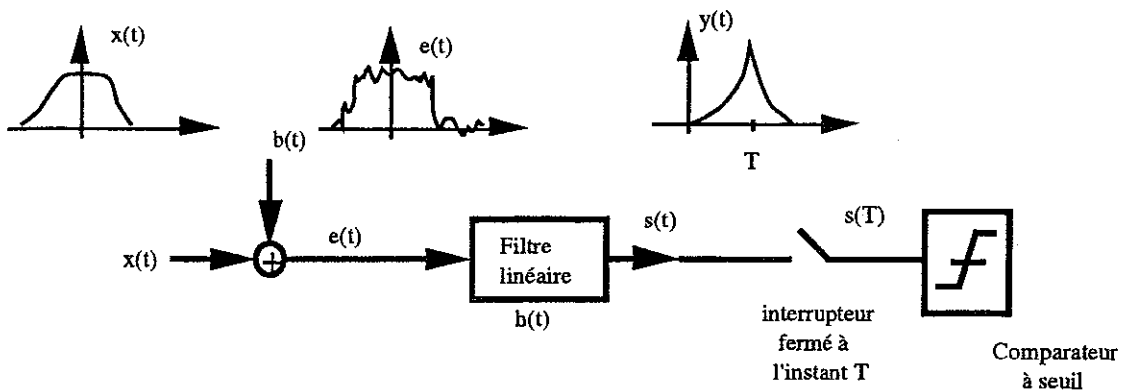
On considère la transmission par tout ou rien d'un signal de durée finie  $x(t)$  à travers un canal soumis à un bruit additif  $b(t)$  supposé blanc de DSP  $S_{bb}(f) = \frac{N_0}{2}$ . On appelle  $E_X$  = énergie de  $x(t)$ .

On se propose de déterminer le "meilleur traitement linéaire" pour décider de la présence ou de l'absence du signal.

On rencontre notamment cette situation :

- en radar où la présence (ou l'absence) de l'écho est liée à présence (ou l'absence) de la cible.
- en transmission numérique où l'eb "1" pourra être représenté par la présence d'une impulsion de tension pendant T et l'eb "0" par son absence.

Principe du détecteur :



1 - Pour déterminer le filtre optimum on choisit de maximiser le critère rapport signal/bruit , à l'instant T, en sortie du filtre soit :

$$\rho = \frac{E[y^2(T)]}{\text{Puissance de bruit à l'instant T}}$$

remarque :  $E[y^2(T)]$  représente la puissance instantanée moyenne du signal  $y(t) = (x(t) * h(t))$  à l'instant  $T$  où le symbole  $(*)$  représente le produit de convolution.

Montrer, en utilisant l'inégalité de Schwartz\* que  $\rho \leq \frac{2E_x}{N_0}$

En déduire que le filtre optimum (filtre adapté) est caractérisé par :  $h(t) = \lambda x(T-t)$

2 - Dans le cas où  $x(t) = \Pi_T(t - \frac{T}{2})$  quelle est l'expression du filtre optimal ? Ce filtre est-il réalisable ?

### Exercice VI.7

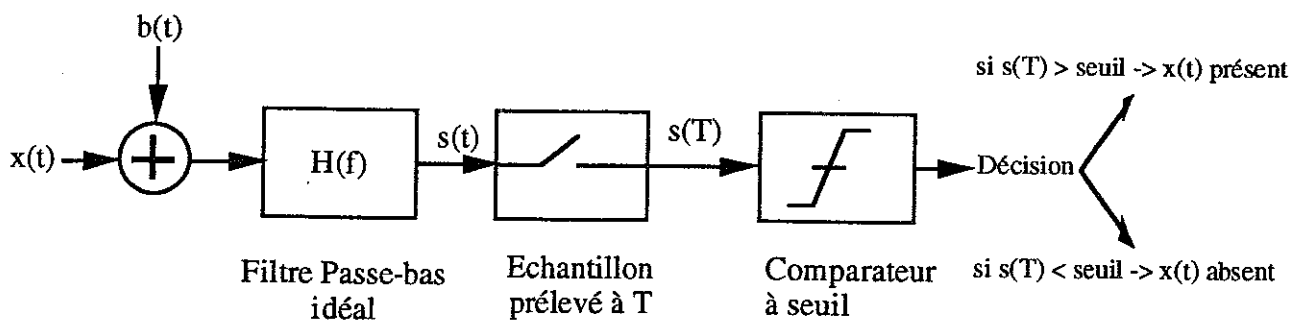
On sait que le "meilleur" traitement linéaire pour détecter, à un instant  $T$ , la présence d'un signal réel de durée finie  $x(t)$  est le filtre adapté caractérisé par une réponse impulsionnelle  $h(t) = \lambda x(T-t)$ .

Le but de l'exercice est de comparer, en terme de probabilité d'erreur, les performances d'un détecteur utilisant ou non un tel dispositif.

Dans toute la suite le signal à détecter  $x(t)$  sera une impulsion rectangulaire centrée de largeur  $\tau$ , d'amplitude  $V$  :  $x(t) = V \Pi_\tau(t)$ .

Ce signal sera perturbé par un bruit blanc, gaussien, centré, de DSP =  $\frac{N_0}{2}$ .

#### I. Probabilité de non-détection avec filtrage passe-bas idéal.



Le filtre pass-bas est supposé idéal, de fonction de transfert :  $H(f) = \prod_{\tau} \frac{1}{\tau} e^{-i2\pi fT}$

$$s(t) = y(t) + b'(t)$$

(  $y(t)$  et  $b'(t)$  représentent respectivement les réponses du filtre à  $x(t)$  et  $b(t)$  )

1 - Quelle est la réponse impulsionnelle  $h(t)$  du filtre passe-bas?

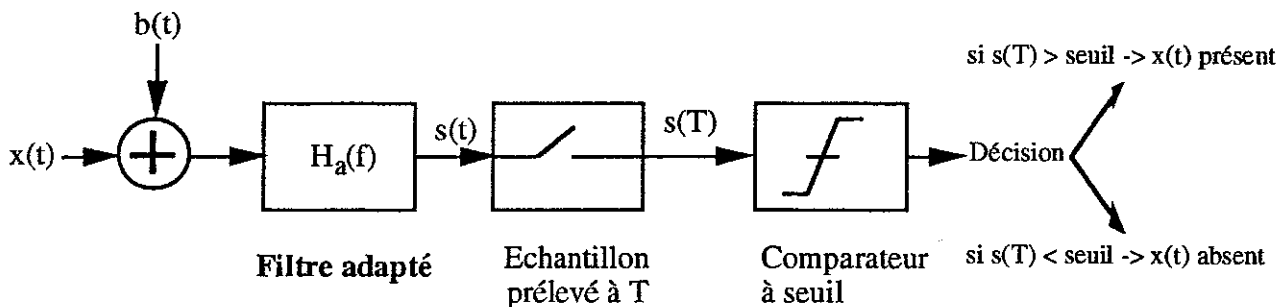
Calculer  $y(T)$ , l'amplitude de l'échantillon du signal utile à l'instant T.

(On donne  $\int_0^{\pi} \text{sinc}(u) du = 1,852$ )

2 - Calculer  $\sigma'^2$  : la puissance du bruit  $b'(t)$ .

3 - En prenant comme valeur du seuil  $\frac{1}{2} y(T)$  et en remarquant que  $b'(t)$  est toujours gaussien, calculer la probabilité que le détecteur décide que  $x(t)$  est absent alors qu'il est effectivement présent (probabilité de non-détection) dans le cas où  $N_0 = \frac{V^2 \tau}{\pi^2}$ .

**II . Probabilité de non-détection avec filtrage adapté.**



La réponse impulsionnelle du filtre adapté est  $h_a(t) = V \prod_{\tau} (T - t)$

$$s(t) = z(t) + b''(t)$$

(  $z(t)$  et  $b''(t)$  représentent respectivement les réponses du filtre à  $x(t)$  et  $b(t)$  )

1 - Calculer  $z(T)$ , l'amplitude de l'échantillon du signal utile à l'instant T.

2 - Calculer  $\sigma''^2$  : la puissance du bruit  $b''(t)$ .

3 - En prenant comme valeur du seuil  $\frac{1}{2} z(T)$  et en remarquant que  $b''(t)$  est toujours gaussien, calculer la probabilité que le détecteur décide que  $x(t)$  est absent alors qu'il est effectivement présent toujours dans le cas où  $N_0 = \frac{V^2 \tau}{\pi^2}$ .





## VII. Signaux à bande étroite

Lorsque l'on désire transmettre à distance une information concrétisée par un signal  $m(t)$  dont le spectre se situe dans le domaine des basses fréquences (par exemple un signal de parole dans la bande  $[0, 4 \text{ KHz}]$ ) il est souvent nécessaire de "translater" cette information dans le domaine fréquentiel, c'est à dire qu'il est nécessaire de générer un nouveau signal  $s(t)$ , porteur de la même information, mais situé beaucoup plus "haut" en fréquence.

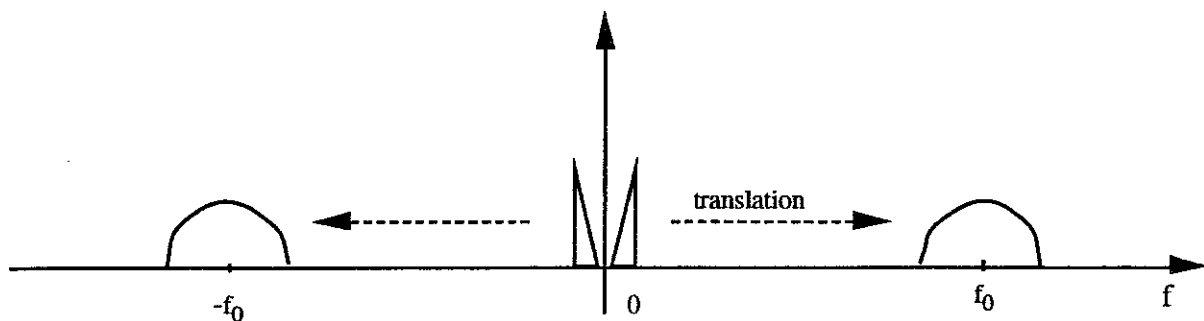


figure 7.1

On utilise pour cela le principe de la modulation d'une onde porteuse de fréquence  $f_0$  (modulation d'amplitude, de phase ou de fréquence) par le signal  $m(t)$  qui génère un signal  $s(t)$  dont le spectre, relativement étroit, se situe "autour" de la fréquence  $f_0$ . Ce type de signal ( $s(t)$ ) est appelé **signal à bande étroite**.

Pour faciliter la description mathématique et la modélisation de ce type de signal on a défini la notion d'**enveloppe complexe** associée à un signal réel, bande étroite. L'objectif de ce chapitre est de définir cette notion nouvelle.

Pour cela nous utiliserons la transformée de Hilbert d'un signal ainsi que la notion de signal analytique associé à un signal réel. Nous commençons donc par définir ces deux notions.

### VII.1. Transformée de Hilbert

**Définition** : Soit  $x(t)$  un signal de TF  $X(f)$ . On appelle transformé de Hilbert de  $x(t)$  le signal noté  $\hat{x}(t)$  défini par :

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(u)}{t-u} du$$

Nous remarquons que la transformation de Hilbert peut être interprétée comme étant un produit de convolution :  $\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t}$  et pratiquement c'est par ce biais que nous manipulerons cette transformation.

En toute rigueur et d'un point de vue purement mathématique l'intégrale qui intervient dans la définition de la transformation de Hilbert doit être prise en valeur principale au sens de Cauchy, c'est à dire que :

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{x(u)}{t-u} du + \int_{+\epsilon}^{+\infty} \frac{x(u)}{t-u} du \right]$$

et  $\hat{x}(t)$  peut effectivement être interprété comme un produit de convolution mais sous la forme :  $\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi} \text{vp} \frac{1}{t}$ , expression dans laquelle  $\text{vp} \frac{1}{t}$  désigne la distribution "valeur principale de Cauchy" définie par :

$$\left\langle \text{vp} \frac{1}{t}, \varphi \right\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \int_{+\epsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt \right].$$

Cette transformation étant régie par un opérateur de convolution peut donc être interprétée comme un filtrage linéaire et invariant dans le temps (filtre de Hilbert).

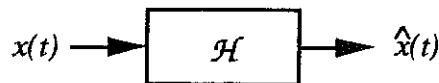


Figure 7.2

Dans la suite c'est uniquement cette interprétation que nous utiliserons pour manipuler les transformées de Hilbert des signaux.

La réponse impulsionnelle du filtre de Hilbert est donc  $h(t) = \frac{1}{\pi t}$

**Remarque :** La fonction  $h(t)$  étant non causale le filtre de Hilbert est lui même non causal donc n'est pas réalisable (dans la pratique on en réalise des approximations opérant sur des bandes de fréquence limitées).

Nous admettrons que sa fonction de transfert est  $H(f) = \text{TF} \left[ \frac{1}{\pi t} \right] (f) = -i \text{sgn}(f)$

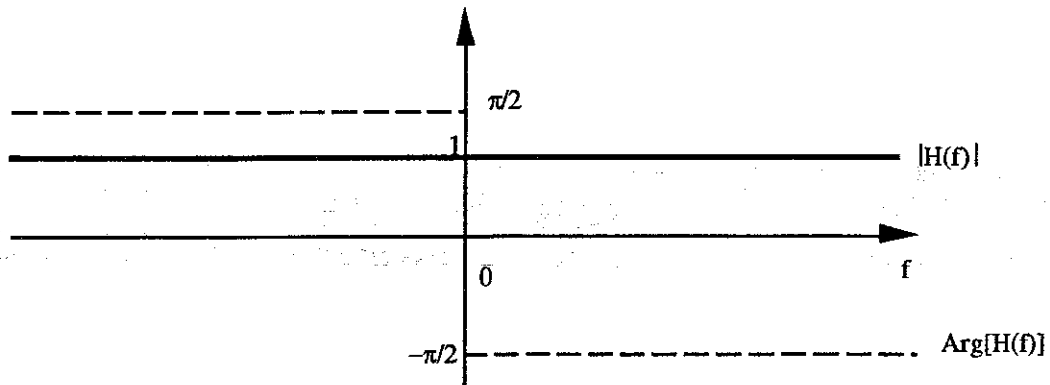


Figure 7.3 Fonction de transfert du filtre de Hilbert

Il s'agit d'un filtre déphaseur pur encore appelé filtre en quadrature.

Par suite, en désignant par  $\hat{X}(f)$  la TF de  $\hat{x}(t)$

$$\hat{X}(f) = -i \operatorname{sgn}(f) X(f)$$

A titre d'application calculons la Transformée de Hilbert de  $x(t) = \cos 2\pi f_0 t$

$$\begin{array}{ccc}
 x(t) = \cos(2\pi f_0 t) & \xrightarrow{\text{TF}} & X(f) = \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \\
 \text{Filtre } \downarrow \text{ de Hilbert} & & \text{Filtre } \downarrow \text{ de Hilbert} \\
 \hat{x}(t) = \sin(2\pi f_0 t) & \xleftarrow{\text{TF}^{-1}} & \hat{X}(f) = -i \operatorname{sgn}(f) X(f) = -\frac{i}{2} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]
 \end{array}$$

donc  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow{\text{TH}} \hat{x}(t) = \sin(2\pi f_0 t) = \cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$

On montrerait de même que :  $x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \xrightarrow{\text{TH}} \hat{x}(t) = -\cos(2\pi f_0 t) = \sin\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$

Enonçons sans démonstration une propriété intéressante de la T. de H. :

Soient  $m(t)$  et  $p(t)$  deux signaux de spectres respectifs  $M(f)$  et  $P(f)$  à supports disjoints : l'un de ces signaux :  $m(t)$  se situant dans le domaine des basses fréquences et l'autre :  $p(t)$  dans le domaine des hautes fréquences.

On montre alors que :  $m(t)p(t) \xrightarrow{\text{TH}} m(t)\hat{p}(t)$

## VII.2. Signal analytique associé à un signal réel

Soit  $x(t)$  un signal réel possédant une transformée de Fourier  $X(f)$ . Le signal  $x(t)$  étant réel, nous avons que  $X(f)$  possède la propriété de symétrie hermitienne :  $X(-f) = \overline{X(f)}$ . Donc la connaissance de  $X(f)$  sur le seul domaine des fréquences positives caractérise complètement le signal réel  $x(t)$ . Il est donc possible d'associer à un signal réel  $x(t)$ , de façon biunivoque, un signal  $z_x(t)$  dont la transformée de Fourier  $Z_x(f)$  est égale à  $X(f)$  sur le domaine des fréquences positives et nulle sur le domaine des fréquences négatives.

Plus précisément  $Z_x(f)$  est défini par :

$$Z_x(f) = \begin{cases} 2X(f) & \text{si } f > 0 \\ 0 & \text{si } f < 0 \end{cases}$$

(Le coefficient 2 n'est introduit que pour des questions de conservation d'énergie ou de puissance).

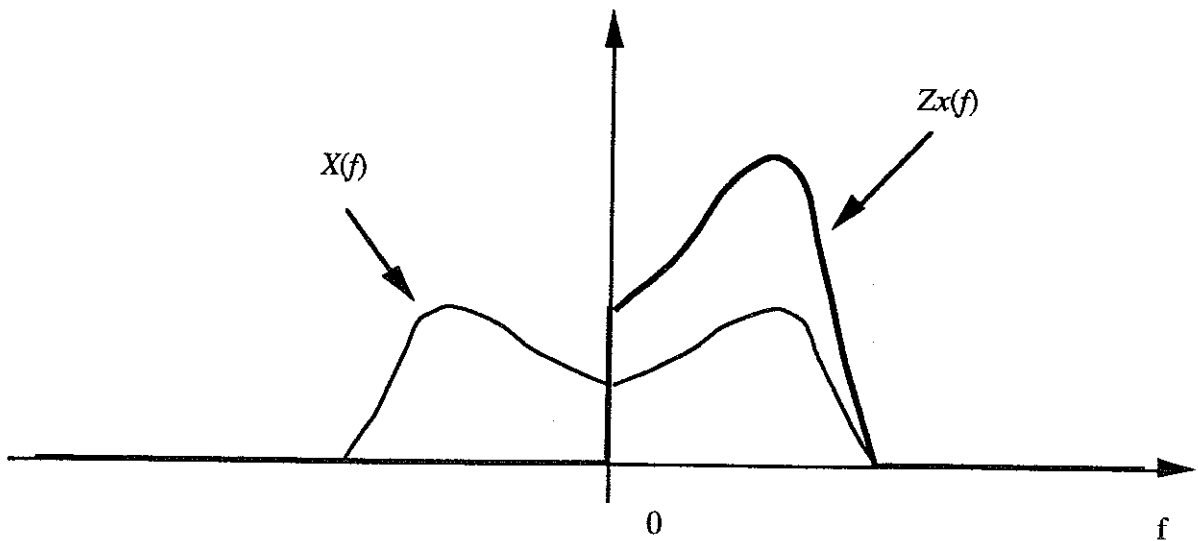


Figure 7.4 Spectres d'un signal réel et du signal analytique associé

Le signal  $z_x(t)$  est alors appelé "*signal analytique associé au signal réel  $x(t)$* " et nous pouvons déjà remarquer que sa transformée de Fourier ne possède pas, par construction même, la propriété de symétrie hermitienne. Il s'agit donc forcément d'un signal purement complexe.

Calculons son expression temporelle  $z_x(t)$  :

$$Z_x(f) = \begin{cases} X(f) + X(f) & \text{si } f > 0 \\ X(f) - X(f) & \text{si } f < 0 \end{cases}$$

$$Z_x(f) = X(f) + \text{sgn}(f)X(f)$$

$$Z_x(f) = X(f) - i^2 \text{sgn}(f)X(f)$$

$$Z_x(f) = X(f) + i(-i \operatorname{sgn}(f))X(f)$$

$$Z_x(f) = X(f) + i\hat{X}(f)$$

soit, en prenant la transformée de Fourier inverse de cette dernière relation :

$$z_x(t) = x(t) + i\hat{x}(t)$$

Le signal  $x(t)$  étant réel par hypothèse, sa transformée de Hilbert  $\hat{x}(t)$  l'est également, on en déduit donc immédiatement la relation réciproque :

$$x(t) = \Re\{z_x(t)\}$$

### VII.3. Enveloppe complexe d'un signal bande étroite

On appelle *enveloppe complexe* (ou *amplitude complexe*) d'un signal réel, bande étroite  $x(t)$ , le signal  $\gamma_x(t)$  dont la transformée de Fourier  $\Gamma_x(f)$  est définie par :

$$\Gamma_x(f) = Z_x(f + f_0) \quad [7.1]$$

(  $Z_x(f)$  désignant la T.F. du signal analytique associé à  $x(t)$  )

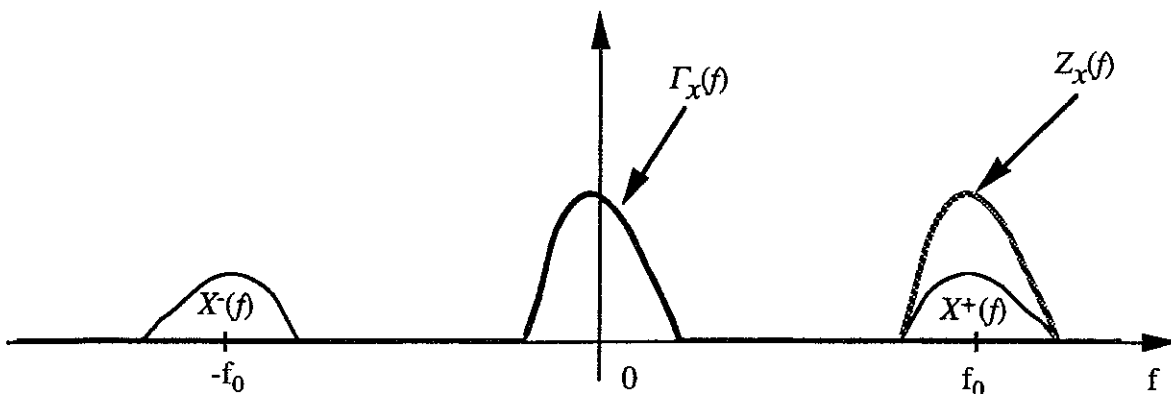


Figure 7.5 Spectre de l'enveloppe complexe

Comme on peut le remarquer sur le schéma ci-dessus  $\gamma_x(t)$  est un signal à priori complexe et "basse fréquence".

Calculons  $\gamma_x(t)$  :

En appliquant la T.F.<sup>-1</sup> à la relation [7.1] on obtient  $\gamma_x(t) = z_x(t)e^{-i2\pi f_0 t}$  soit encore :

$$\gamma_x(t) = [x(t) + i\hat{x}(t)]e^{-i2\pi f_0 t}$$

$x(t)$  et  $\hat{x}(t)$  étant réels, on en déduit la relation réciproque :

$$x(t) = \Re\left[\gamma_x(t)e^{+i2\pi f_0 t}\right] \quad [7.2]$$

Le signal  $\gamma_x(t)$  est à priori un signal complexe. On peut donc le décomposer

- en module et argument

ou - en parties réelle et imaginaire

Ces 2 écritures possibles de  $\gamma_x(t)$  vont nous fournir 2 représentations différentes d'un signal réel bande étroite.

- Décomposition de  $\gamma_x(t)$  en module et argument :

De  $\gamma_x(t) = |\gamma_x(t)|e^{i\text{Arg}\gamma_x(t)}$  et de la relation [7.2] on en déduit que :

$$x(t) = |\gamma_x(t)| \cos[2\pi f_0 t + \text{Arg} \gamma_x(t)]$$

Interprétation :

En se souvenant que  $\gamma_x(t)$  est un signal "basse fréquence" donc à variations "lentes" par rapport à  $f_0$  la relation précédente nous permet d'interpréter un signal à bande étroite comme étant un signal "sinusoïdal" de fréquence  $f_0$ , d'amplitude maximale  $|\gamma_x(t)|$  variable et à variation lente et de phase initiale  $\text{Arg} \gamma_x(t)$  variable et à variation lente également.

A ce titre :

$|\gamma_x(t)|$  est appelé : *enveloppe instantanée* de  $x(t)$

$\Theta(t) = 2\pi f_0 t + \text{Arg} \gamma_x(t)$  : *phase instantanée* de  $x(t)$

et  $f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Theta(t)}{dt} = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\text{Arg} \gamma_x(t)}{dt}$  : *fréquence instantanée* de  $x(t)$

En résumé un signal à "bande étroite" peut être interprété comme un signal sinusoïdal modulé en amplitude et/ou modulé en phase ou en fréquence.

- Décomposition de  $\gamma_x(t)$  en parties réelle et imaginaire :

De  $\gamma_x(t) = p_x(t) + i q_x(t)$  et de la relation [7.2] on déduit une autre expression du signal à "bande étroite"  $x(t)$  :

$$x(t) = p_x(t) \cos(2\pi f_0 t) - q_x(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

expression dans laquelle :

$p_x(t) = \Re[\gamma_x(t)]$  est appelé la *composante en phase* de  $x(t)$

$q_x(t) = \Im[\gamma_x(t)]$  est appelé la *composante en quadrature* de  $x(t)$

Il est à noter que, là encore,  $p_x(t)$  et  $q_x(t)$  sont des signaux "basse fréquence".

Dans un souci de simplicité nous avons supposé jusqu'ici que le signal à "bande étroite"  $x(t)$  disposait d'un T.F.  $X(f)$ . Pour être complet il est maintenant nécessaire de généraliser les définitions précédentes aux différentes catégories de signaux que nous connaissons et, en particulier, aux signaux aléatoires.

### Enveloppe complexe d'un signal bande étroite aléatoire

Soit  $x(t)$  un signal réel, bande étroite, aléatoire, stationnaire d'ordre 2 et centré, de DSP  $S_{xx}(f)$ . Par analogie avec le cas déterministe on définit son enveloppe complexe  $\gamma_x(t)$  par :

$$\gamma_x(t) = [x(t) + i\hat{x}(t)]e^{-i2\pi f_0 t}$$

$x(t)$  étant un processus aléatoire il en est de même pour  $\hat{x}(t)$  et  $\gamma_x(t)$ . Nous allons montrer que  $\gamma_x(t)$  est stationnaire d'ordre 2 et centré et calculer sa DSP  $S_{\gamma\gamma}(f)$ .

$\gamma_x(t)$  est un processus aléatoire centré. En effet :

$$E[\gamma_x(t)] = (E[x(t)] + iE[\hat{x}(t)])e^{-i2\pi f_0 t} = 0$$

$$\text{car } E[x(t)] = E[\hat{x}(t)] = 0$$

Calculons maintenant sa DSP. Pour cela commençons par calculer sa fonction d'autocorrélation.

$$R_{\gamma\gamma}(t, \tau) = E[\gamma_x(t)\overline{\gamma_x(t-\tau)}]$$

$$R_{\gamma\gamma}(t, \tau) = E\left\{ \left[ [x(t) + i\hat{x}(t)]e^{-i2\pi f_0 t} \right] \left[ [x(t-\tau) - i\hat{x}(t-\tau)]e^{+i2\pi f_0(t-\tau)} \right] \right\}$$

$$R_{\gamma\gamma}(t, \tau) = e^{-i2\pi f_0 \tau} \left[ (R_{xx}(\tau) + R_{\hat{x}\hat{x}}(\tau)) + i(R_{\hat{x}x}(t, \tau) - R_{x\hat{x}}(t, \tau)) \right] \quad [7.3]$$

Grâce au Théorème des Interférences on montre facilement que :

-  $x(t)$  et  $\hat{x}(t)$  sont mutuellement stationnaires

$$- S_{\hat{x}\hat{x}}(f) = -i \operatorname{sgn}(f) S_{xx}(f)$$

$$- S_{x\hat{x}}(f) = +i \operatorname{sgn}(f) S_{xx}(f)$$

On en déduit donc que  $\gamma_x(t)$  est stationnaire à l'ordre 2 et, en appliquant la TF à la relation [7.3] il vient :

$$S_{\gamma\gamma}(f) = \delta(f + f_0) * \left[ (S_{xx}(f) + S_{\hat{x}\hat{x}}(f)) + i(S_{\hat{x}x}(f) - S_{x\hat{x}}(f)) \right]$$

$$\text{or } S_{\hat{x}\hat{x}}(f) = |-i \operatorname{sgn}(f)|^2 S_{xx}(f) = S_{xx}(f)$$

$$\text{donc } S_{\gamma\gamma}(f) = \delta(f + f_0) * [2S_{xx}(f) + 2\operatorname{sgn}(f)S_{xx}(f)]$$

or  $S_{xx}(f) + \operatorname{sgn}(f)S_{xx}(f) = 2S_{xx}^+(f)$  (expression dans laquelle  $S_{xx}^+(f)$  désigne la partie de  $S_{xx}(f)$  située dans le domaine des fréquences positives)

donc, en définitive :

$$S_{\gamma\gamma}(f) = 4 S_{xx}^+(f + f_0)$$

### Composantes en phase et en quadrature

Le signal  $x(t)$  étant toujours réel, bande étroite, aléatoire, stationnaire d'ordre 2 et centré, de DSP  $S_{xx}(f)$ , et  $\gamma_x(t)$  désignant son enveloppe complexe, on appelle composantes en phase et en quadrature de  $x(t)$  les parties réelle et imaginaire de  $\gamma_x(t)$ .

$$p(t) = \Re[\gamma_x(t)] \quad \text{et} \quad q(t) = \Im[\gamma_x(t)]$$

Comme  $x(t) = \Re[\gamma_x(t)e^{+i2\pi f_0 t}]$  on a toujours  $x(t) = p(t)\cos(2\pi f_0 t) - q(t)\sin(2\pi f_0 t)$ .

$\gamma_x(t)$  étant un processus aléatoire, il en est de même pour  $p(t)$  et  $q(t)$ .

Nous allons montrer que  $p(t)$  et  $q(t)$  sont respectivement stationnaires d'ordre 2 et centrés, mutuellement stationnaires et nous calculerons leur DSP et leurs interspectres.

$$x(t) \text{ centré} \Rightarrow E[x(t)] = 0 = E[p(t)]\cos 2\pi f_0 t - E[q(t)]\sin 2\pi f_0 t \quad \text{et ceci } \forall t$$

Ceci ne peut être obtenu que si  $E[p(t)] = E[q(t)] = 0$

$x(t)$  est stationnaire d'ordre 2 donc  $R_{xx}$  ne dépend que de  $\tau$  or :

$$R_{xx}(\tau) = E[(p(t)\cos 2\pi f_0 t - q(t)\sin 2\pi f_0 t)(p(t-\tau)\cos 2\pi f_0(t-\tau) - q(t-\tau)\sin 2\pi f_0(t-\tau))]$$

soit en développant :

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) = & R_{pp}(t, \tau) \left[ \frac{\cos 2\pi f_0(2t - \tau) + \cos 2\pi f_0 \tau}{2} \right] \\ & + R_{qq}(t, \tau) \left[ \frac{\cos 2\pi f_0 \tau - \cos 2\pi f_0(2t - \tau)}{2} \right] \\ & - R_{pq}(t, \tau) \left[ \frac{\sin 2\pi f_0(2t - \tau) - \sin 2\pi f_0 \tau}{2} \right] \\ & - R_{qp}(t, \tau) \left[ \frac{\sin 2\pi f_0(2t - \tau) + \sin 2\pi f_0 \tau}{2} \right] \end{aligned}$$

Pour que  $R_{xx}$  ne dépend que de  $\tau$  pour tout  $t$  il faut déjà que :

$$\begin{cases} R_{pp}(t, \tau) = R_{qq}(t, \tau) \\ R_{pq}(t, \tau) = -R_{qp}(t, \tau) \end{cases}$$

de ce fait :

$$R_{xx}(\tau) = R_{pp}(t, \tau)\cos 2\pi f_0 \tau + R_{pq}(t, \tau)\sin 2\pi f_0 \tau$$

et d'autre part, il faut que :

$$\begin{cases} R_{pp}(t, \tau) = R_{pp}(\tau) \\ R_{pq}(t, \tau) = R_{pq}(\tau) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(t) \text{ et } q(t) \text{ sont respectivement stationnaires au } 2^\circ \text{ ordre} \\ p(t) \text{ et } q(t) \text{ sont mutuellement stationnaires au } 2^\circ \text{ ordre} \end{cases}$$



Donc en définitive :

$$R_{xx}(\tau) = R_{pp}(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau + R_{pq}(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau$$

On en déduit, en prenant la TF de cette dernière relation :

$$S_{xx}(f) = S_{pp}(f) * \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] + S_{pq}(f) * \frac{1}{2i} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$$

soit encore :

$$S_{xx}(f) = \frac{1}{2} [S_{pp}(f - f_0) + S_{pp}(f + f_0)] + \frac{1}{2i} [S_{pq}(f - f_0) - S_{pq}(f + f_0)]$$

On remarque alors que :

$$S_{xx}^+(f) = \frac{1}{2} S_{pp}(f - f_0) + \frac{1}{2i} S_{pq}(f - f_0)$$

$$S_{xx}^-(f) = \frac{1}{2} S_{pp}(f + f_0) - \frac{1}{2i} S_{pq}(f + f_0)$$

On en déduit que :

$$S_{xx}^+(f + f_0) = \frac{1}{2} S_{pp}(f) + \frac{1}{2i} S_{pq}(f)$$

$$S_{xx}^-(f - f_0) = \frac{1}{2} S_{pp}(f) - \frac{1}{2i} S_{pq}(f)$$

D'où on tire, en additionnant membre à membre ces 2 égalités :

$$S_{pp}(f) = S_{xx}^+(f + f_0) + S_{xx}^-(f - f_0) \quad [7.4]$$

et en les retranchant

$$S_{pq}(f) = i [S_{xx}^+(f + f_0) - S_{xx}^-(f - f_0)] \quad [7.5]$$

En résumé, nous venons de montrer que si  $x(t)$  est, stationnaire d'ordre 2 ses composantes en phase et en quadrature sont stationnaires d'ordre 2, centrées et mutuellement stationnaires.

Leurs densités spectrales de puissance sont données par la relation :

$$\boxed{S_{pp}(f) = S_{qq}(f) = S_{xx}^+(f + f_0) + S_{xx}^-(f - f_0)}$$

Leurs densités interspectrales sont données par :

$$\boxed{S_{pq}(f) = -S_{qp}(f) = i [S_{xx}^+(f + f_0) - S_{xx}^-(f - f_0)]}$$

Nous allons montrer, pour terminer, que  $p(t)$  et  $q(t)$  sont décorréliées au même instant.

Nous venons de voir que  $R_{pq}(\tau) = -R_{qp}(\tau)$ , d'autre part et de façon générale cette fois  $R_{pq}(-\tau) = R_{qp}(\tau)$  (cf théorème des interférences). On en déduit donc que  $R_{pq}(\tau) = -R_{pq}(-\tau)$ .

En particulier, pour  $\tau = 0$  (c'est à dire pour un écart temporel nul),  $R_{pq}(0) = -R_{pq}(0)$  d'où  $R_{pq}(0) = 0$  d'où, en revenant à la définition de  $R_{pq}$ ,  $E[p(t)q(t)] = 0 = E[p(t)]E[q(t)]$  puisque

$p(t)$  et  $q(t)$  sont centés. Cette dernière égalité montre bien que  $p(t)$  et  $q(t)$  sont décorréliées au même instant.

**Exemple :** Le bruit blanc bande étroite.

C'est un processus aléatoire  $b(t)$ , stationnaire au sens large et centré, de DSP constante, égale à  $\frac{N_0}{2}$  sur une bande de fréquence limitée de largeur  $B$  et située "autour" d'une fréquence  $f_0$ .

Nous supposons ici pour simplifier que  $f_0$  est au centre de  $B$ .

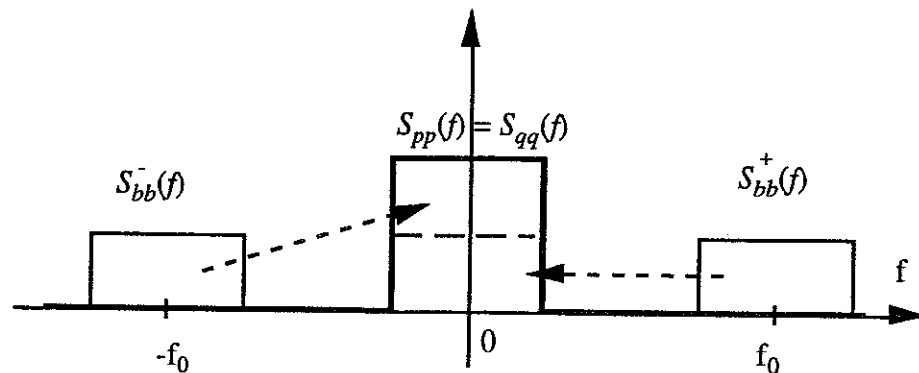
$$\text{En d'autres termes } S_{bb}(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & \text{si } f \in \left[ f_0 - \frac{B}{2}, f_0 + \frac{B}{2} \right] \cup \left[ -f_0 - \frac{B}{2}, -f_0 + \frac{B}{2} \right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'après ce qui précède  $b(t)$  peut s'écrire sous la forme :

$$b(t) = p(t) \cos 2\pi f_0 t - q(t) \sin 2\pi f_0 t$$

D'après la formule [7.4] les DSP des composantes en phase et en quadrature sont données par :

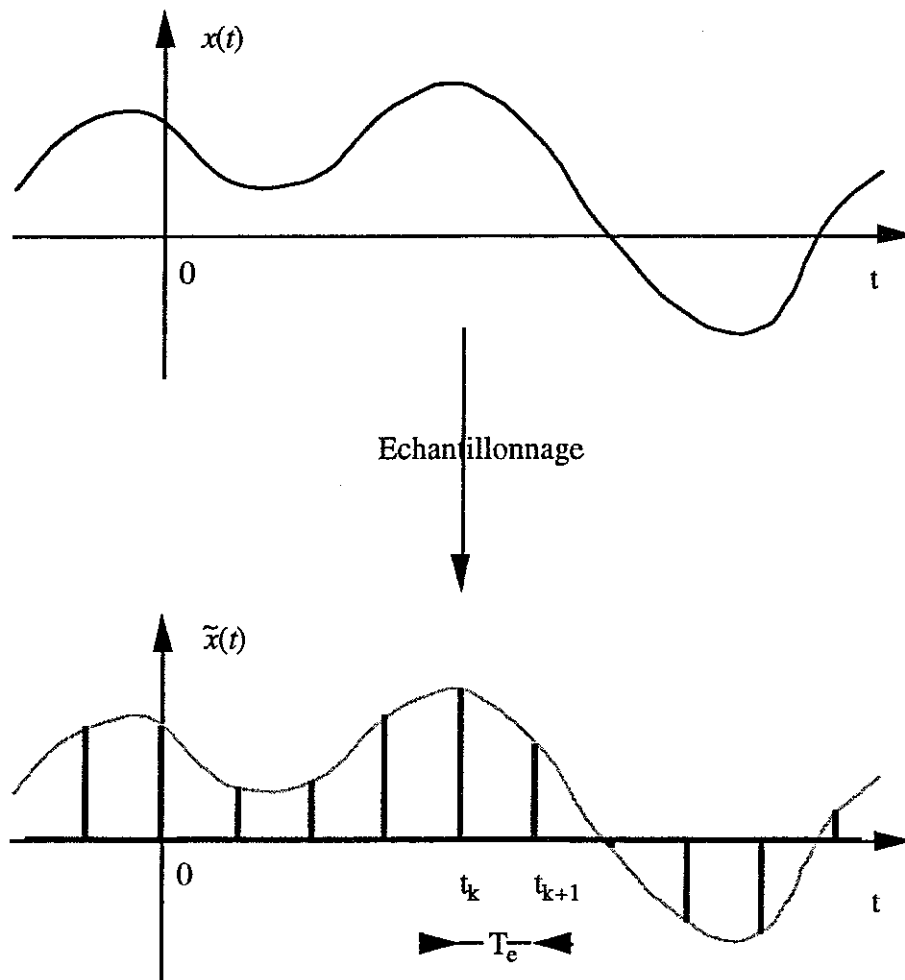
$$S_{pp}(f) = S_{qq}(f) = N_0 \Pi_B(f) \text{ comme le montre la figure ci-dessous.}$$



**Figure 7.6** DSP des composantes en phase et en quadrature d'un bruit blanc bande étroite

## VIII. L'échantillonnage

De façon idéale, échantillonner un signal  $x(t)$  à temps continu consiste à générer un nouveau signal  $\tilde{x}(t)$  toujours à temps continu, formé de la succession des valeurs prises par  $x(t)$  en des instants particuliers, dits instants d'échantillonnage, (en général espacés d'un temps constant  $T_e$  appelé période d'échantillonnage) et nul en dehors de ces instants d'échantillonnage. L'inverse de la période d'échantillonnage  $f_e = \frac{1}{T_e}$  est alors appelé fréquence d'échantillonnage.



**Figure 8.1** Signal à temps continu et sa version échantillonnée

De façon très schématique le dispositif d'échantillonnage peut être considéré comme un contact se fermant périodiquement (périodicité  $T_e$ ) pendant un laps de temps infiniment bref.

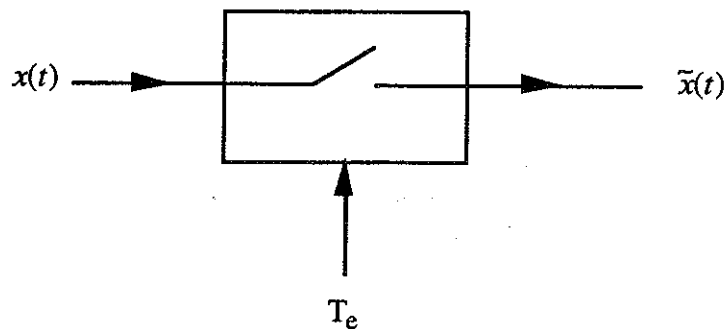


Figure 8.2 Schéma de principe d'un échantillonneur

L'échantillonnage est, en théorie et en traitement du signal, une opération extrêmement importante qui possède de nombreuses applications pratiques et qui est en particulier une étape préalable et indispensable au traitement numérique du signal. Mais cette opération n'offre d'intérêt que si elle est **réversible**, en d'autres termes si, disposant du signal échantillonné  $\tilde{x}(t)$  il est possible de reconstituer le signal d'origine  $x(t)$  sans perte d'information.

L'objectif de ce chapitre est de donner une modélisation mathématique de cette opération, tant dans le domaine temporel que dans le domaine fréquentiel, et d'en déduire les conditions que doivent respecter le signal  $x(t)$  et la fréquence d'échantillonnage pour que cette opération soit réversible. Pour cela nous considérerons dans un premier temps l'échantillonnage comme étant idéal en ce sens que la durée de chaque échantillon sera supposée infiniment brève, nous étudierons ensuite les cas plus pratiques où chaque échantillon dure un certain temps  $\theta$  non négligeable, nous terminerons enfin par l'étude du cas assez particulier des signaux à bande étroite.

### VIII.1 L'échantillonnage : point de vue théorique

Nous supposons ici que les échantillons du signal ont une durée "infiniment" brève et qu'ils se situent à des instants  $t_k$  régulièrement espacés d'une période  $T_e$ . A un changement d'origine des temps près ces instants sont donc de la forme :  $t_k = k T_e$ .

Sous ces hypothèses on peut alors représenter mathématiquement le signal échantillonné par :

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t_k) \delta(t - t_k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e)$$

soit 
$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - kT_e)$$

soit enfin :

$$\boxed{\tilde{x}(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)} \quad [8.1]$$

L'expression  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$  qui apparaît dans cette dernière relation est appelée *peigne de Dirac* de période  $T_e$  et notée  $\text{III}_{T_e}(t)$  (prononcer "sha").

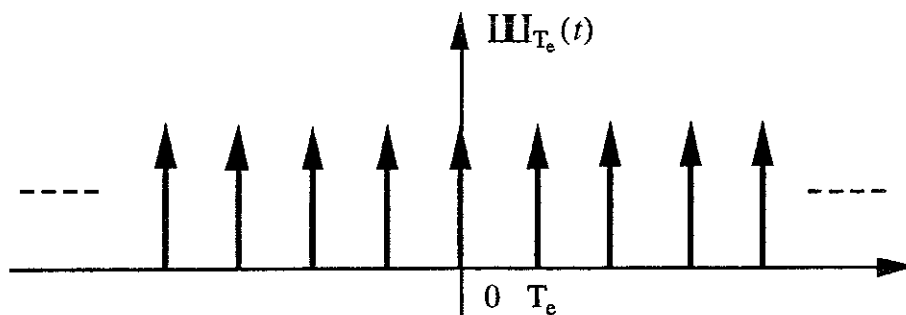


Figure 8.3 Peigne de Dirac

La relation [8.1] peut donc aussi s'écrire :

$$\boxed{\tilde{x}(t) = x(t) \text{III}_{T_e}(t)} \quad [8.2]$$

Pour obtenir le modèle en fréquence du signal échantillonné il suffit alors de prendre la TF de l'expression [8.2] (en supposant que  $x(t)$  dispose d'une transformée de Fourier  $X(f)$ ).

Nous supposons également que la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac est encore un peigne de Dirac, plus précisément :  $\text{III}_{T_e}(t) \xrightarrow{\text{TF}} \frac{1}{T_e} \text{III}_{f_e}(f)$  avec  $f_e = \frac{1}{T_e}$

En désignant par  $\tilde{X}(f)$  la transformée de Fourier de  $\tilde{x}(t)$  il vient :

$$\tilde{X}(f) = X(f) * \frac{1}{T_e} \text{III}_{f_e}(f)$$

$$\text{soit} \quad \tilde{X}(f) = \frac{1}{T_e} \left[ X(f) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k f_e) \right]$$

$$\text{soit} \quad \tilde{X}(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f) * \delta(f - k f_e)$$

soit enfin :

$$\boxed{\tilde{X}(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - k f_e)} \quad [8.3]$$

Cette dernière relation montre que le spectre du signal échantillonné est obtenu en "périodisant" le spectre du signal de départ avec une période  $f_e$  (cf. figure 8.3).

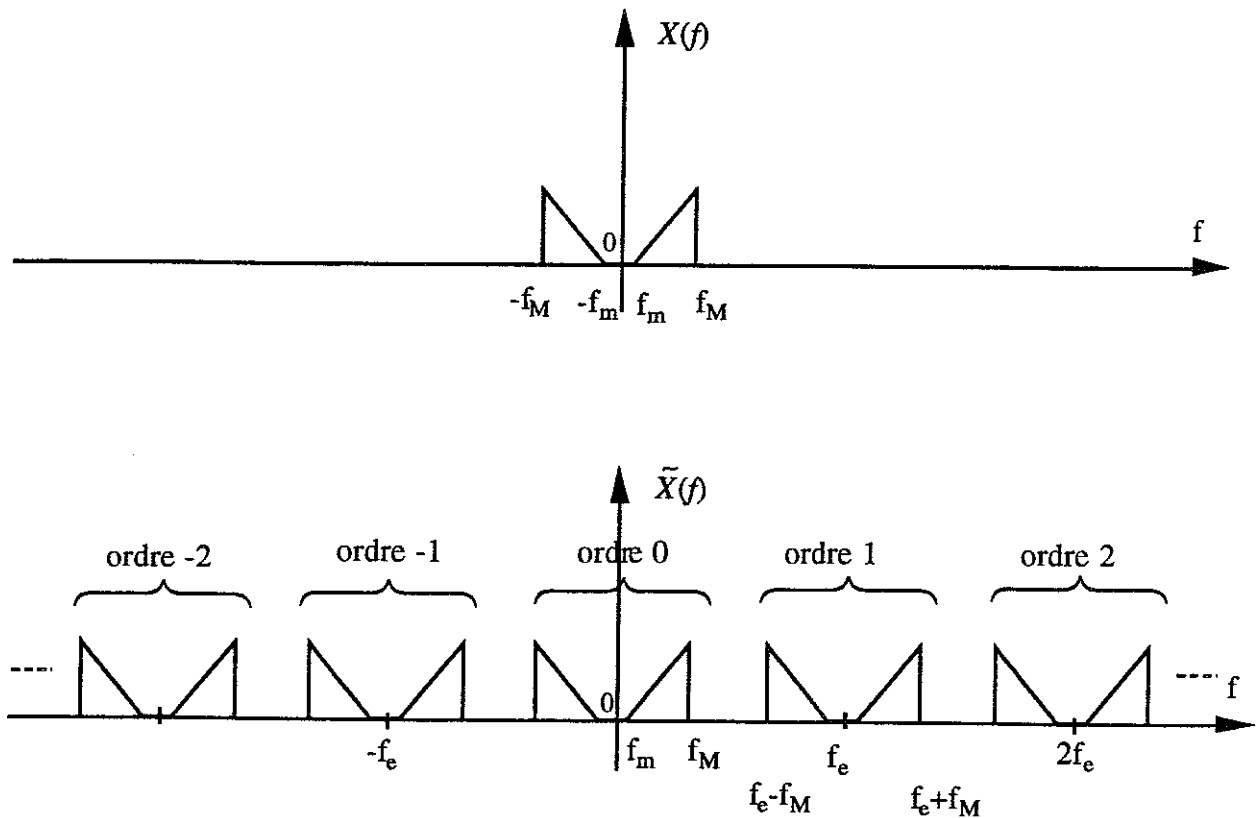


Figure 8.4

On constate sur la figure 8.3 que le spectre du signal échantillonné  $\tilde{X}(f)$  contient, à un facteur multiplicatif près, le spectre du signal initial (ordre 0). De part la dualité temps-fréquence assurée par la transformée de Fourier il est donc théoriquement possible de reconstituer le signal  $x(t)$  à partir du signal  $\tilde{x}(t)$  en ne retenant, par filtrage passe-bas, que l'ordre 0 de la périodisation. Comme on le voit sur la figure ceci n'est possible qu'à la double condition suivante :

- Le support fréquentiel du spectre du signal initial est borné ; il existe donc une fréquence maximale  $f_M$

- Il est possible de placer la bande de transition du filtre passe-bas de reconstitution entre les fréquences  $f_M$  et  $f_e - f_M$ .

Autrement dit, il faut que  $f_e - f_M > f_M$  pour éviter toute interférence entre les ordre 0 et 1 dans la périodisation.

En définitive la condition de reconstitution revient à :

$$f_e > 2 f_M$$

ce qui constitue le *critère de Shannon*.

## VIII.2 L'échantillonnage : point de vue pratique

Dans le chapitre précédent, pour simplifier la mise en équation de l'opération d'échantillonnage, nous avons supposé que la durée de chaque échantillon était infiniment brève. On se doute bien que dans la pratique ceci n'est jamais réalisé et que forcément chaque échantillon durera un certain temps  $\theta$ . Nous allons voir la conséquence, sur les équations précédentes, de ce point de vue un peu plus réaliste en considérant 2 types d'échantillonneurs : l'échantillonneur suiveur et l'échantillonneur bloqueur.

### VIII.2.1 L'échantillonneur suiveur

Pour ce type d'échantillonneur l'amplitude de chaque échantillon va suivre l'amplitude du signal à échantillonner.

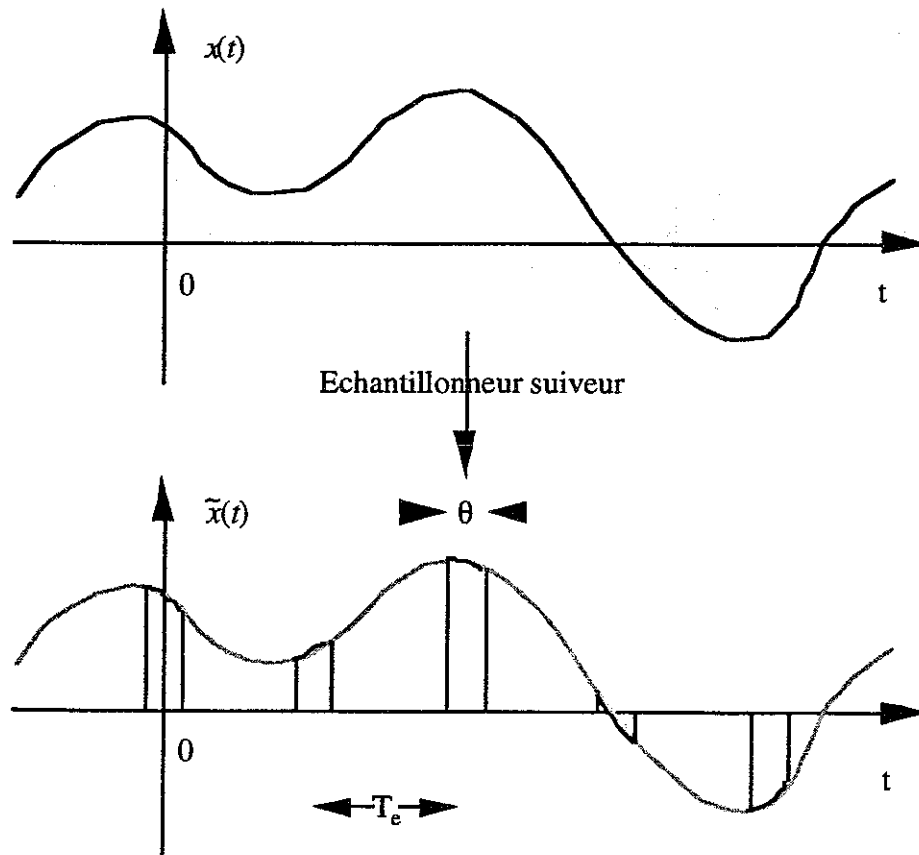


Figure 8.5 Echantillonneur suiveur

On peut alors modéliser le signal échantillonné  $\tilde{x}(t)$  par :

$$\tilde{x}(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi_{\theta}(t - kT_e)$$

soit 
$$\tilde{x}(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi_{\theta}(t) * \delta(t - kT_e)$$

soit 
$$\tilde{x}(t) = x(t) \left[ \Pi_{\theta}(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) \right]$$

soit, en prenant la transformée de Fourier de cette dernière relation :

$$\tilde{X}(f) = X(f) * \left[ \theta \operatorname{sinc}(\pi f \theta) \cdot \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k f_e) \right]$$

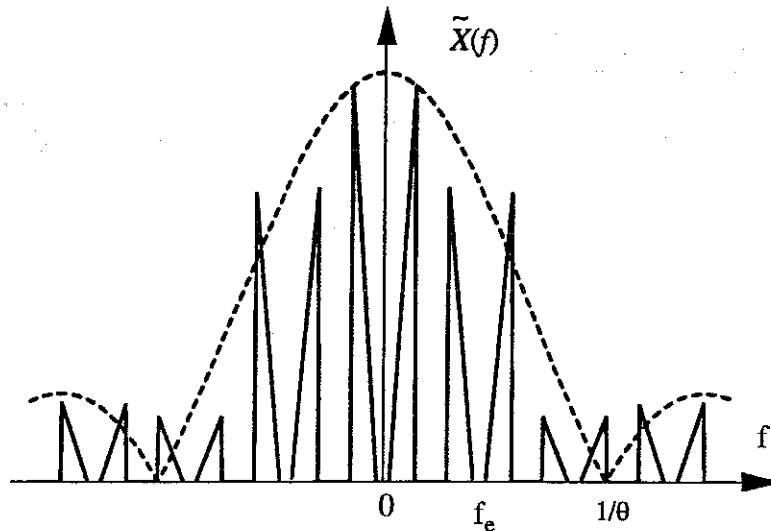
soit 
$$\tilde{X}(f) = X(f) * \left[ \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\theta \operatorname{sinc}(\pi f \theta)) \delta(f - k f_e) \right]$$

soit 
$$\tilde{X}(f) = X(f) * \left[ \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\theta \operatorname{sinc}(\pi k f_e \theta)) \delta(f - k f_e) \right]$$

soit 
$$\tilde{X}(f) = \frac{\theta}{T_e} \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\operatorname{sinc}(\pi k f_e \theta)) X(f) * \delta(f - k f_e) \right]$$



soit enfin 
$$\tilde{X}(f) = \frac{\theta}{T_e} \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\text{sinc}(\pi k f_e \theta)) X(f - k f_e) \right]$$



**Figure 8.6** Spectre d'un signal issu d'un échantillonneur suiveur (ici  $\theta = \frac{3}{7} T_e$ )

On retrouve le fait que le spectre du signal échantillonné est le "périodisé" du spectre du signal de départ avec une période  $f_e$  mais cette fois chaque ordre de périodisation est affecté d'un coefficient multiplicatif, constant pour cet ordre (l'ordre  $k$  est globalement multiplié par le coefficient  $\frac{\theta}{T_e} \text{sinc}(\pi k f_e \theta)$ ).

La reconstitution du signal d'origine peut donc se faire sans distorsion sous réserve bien entendu que le critère de Shannon soit respecté.

### VIII.2.2 L'échantillonneur bloqueur

Pour ce type d'échantillonneur l'amplitude de chaque échantillon reste constante pendant toute sa durée.

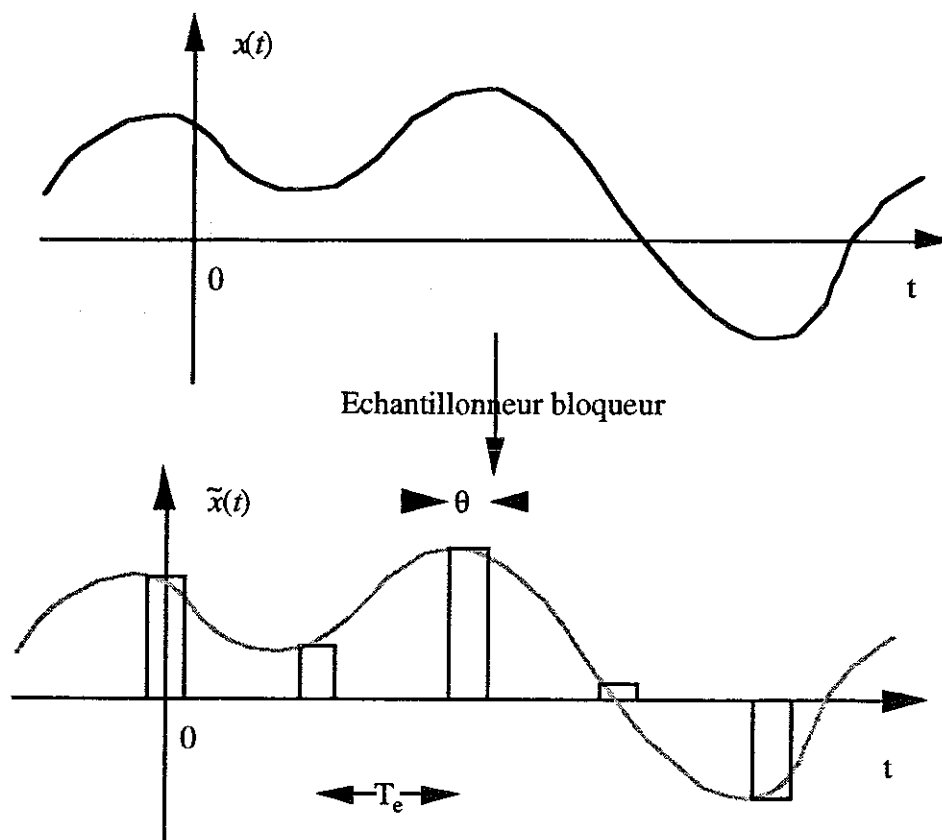


Figure 8.7 Echantillonneur bloqueur

On peut alors modéliser le signal échantillonné  $\tilde{x}(t)$  par :

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi_{\theta}(t - kT_e) \cdot x\left(kT_e - \frac{\theta}{2}\right)$$

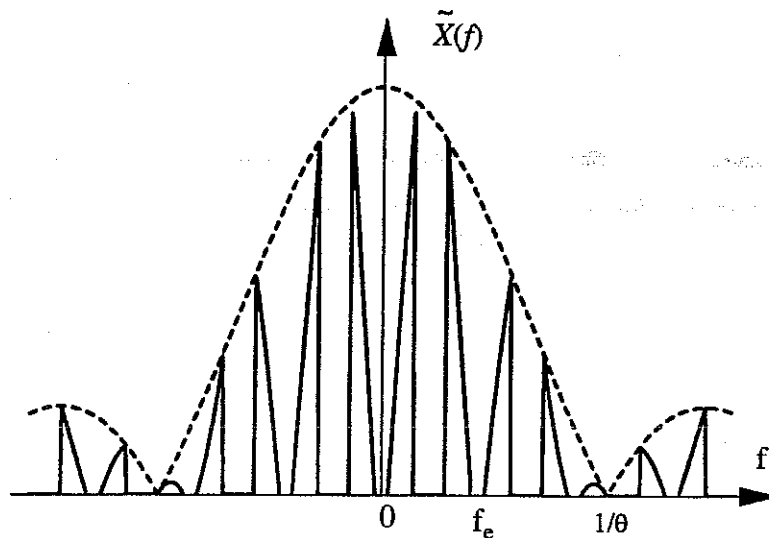
soit 
$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi_{\theta}(t) * \delta(t - kT_e) x\left(kT_e - \frac{\theta}{2}\right)$$

soit 
$$\tilde{x}(t) = \Pi_{\theta}(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) x\left(t - \frac{\theta}{2}\right)$$

soit enfin 
$$\tilde{x}(t) = \Pi_{\theta}(t) * \left[ x\left(t - \frac{\theta}{2}\right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) \right]$$

soit, en prenant la transformée de Fourier de cette dernière relation :

$$\tilde{X}(f) = \theta \operatorname{sinc}(\pi f \theta) \left[ X(f) e^{-i2\pi f \frac{\theta}{2}} * \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_e) \right]$$



**Figure 8.8** Spectre d'un signal issu d'un échantillonneur bloqueur (ici  $\theta = \frac{3}{7}T_e$ )

On retrouve toujours le fait que le spectre du signal échantillonné est le "périodisé" du spectre du signal de départ avec une période  $f_e$  mais cette fois l'ensemble du spectre est affecté d'un coefficient multiplicatif, fonction de la fréquence  $\frac{\theta}{T_e} \text{sinc}(\pi f \theta)$ .

La forme de chaque ordre est donc modifiée par rapport au signal d'origine et ce type d'échantillonneur introduit donc une distorsion lors de la reconstitution du signal, distorsion d'autant plus faible que  $\theta$  est petit.

### VIII.3 Echantillonnage des signaux à bande étroite

Nous allons considérer le cas très particulier des signaux à bande étroite pour lesquels il est possible, comme nous allons le voir, d'utiliser une fréquence d'échantillonnage inférieure à la fréquence de Shannon.

Soit  $x(t)$  un tel signal, de spectre  $X(f)$  à support borné  $[-f_M, -f_m] \cup [f_m, f_M]$ . Echantillonnons ce signal à une fréquence  $f_e$  plus petite que  $2f_M$ . Conformément à ce qui a été démontré en VIII.1  $\tilde{X}(f)$ , le spectre du signal échantillonné est obtenu en "périodisant" le spectre du signal initial  $X(f)$  avec une période  $f_e$  (cf Figure 8.9).

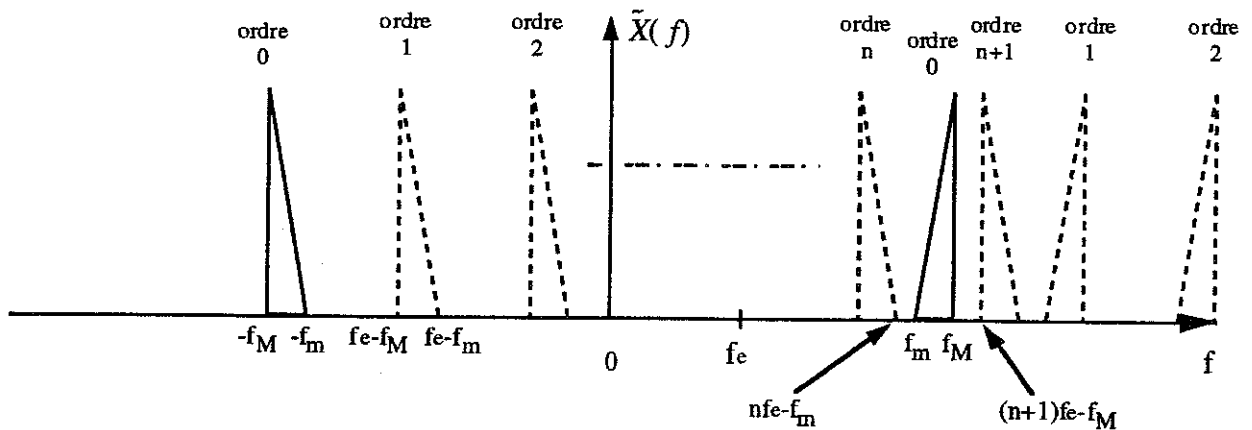


Figure 8.9 Spectre d'un signal à bande étroite échantillonné

L'ordre 0 de périodisation occupe la bande :  $[-f_M, -f_m] \cup [f_m, f_M]$

L'ordre 1 de périodisation occupe la bande :  $[f_e - f_M, f_e - f_m] \cup [f_e + f_m, f_e + f_M]$

...

L'ordre  $k$  de périodisation occupe la bande :

$$[k f_e - f_M, k f_e - f_m] \cup [k f_e + f_m, k f_e + f_M] \quad k \in \mathbf{Z}$$

Comme le montre la Figure 8.9 il sera possible de reconstituer le signal original  $x(t)$  à partir du signal échantillonné  $\tilde{x}(t)$  par filtrage passe-bande de l'ordre 0 de périodisation si celui-ci n'est pas altéré, c'est à dire s'il n'interfère avec aucun autre ordre de périodisation. En d'autres termes, il faut et il suffit qu'il existe un entier  $n$  tel que l'ordre 0 s'insère strictement entre les ordres  $n$  et  $n+1$ . De façon plus précise, il faut et il suffit qu'il existe  $n \in \mathbf{IN}$  tel que :

$$\begin{cases} n f_e - f_m < f_m \\ (n+1) f_e - f_M > f_M \end{cases}$$

c'est à dire qu'il existe  $n \in \mathbf{IN}$  tel que :  $\frac{2f_M}{n+1} < f_e < \frac{2f_m}{n}$  [8.4]

Si un tel  $n$  existe, alors cette dernière relation fournira un intervalle admissible pour la fréquence d'échantillonnage.

Pour qu'un tel  $n$  existe il faut que  $\frac{2f_M}{n+1} < \frac{2f_m}{n}$

soit encore que  $\frac{n+1}{n} > \frac{f_M}{f_m}$

soit  $1 + \frac{1}{n} > \frac{f_M}{f_m} \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{f_M - f_m}{f_m} \Rightarrow n < \frac{f_m}{f_M - f_m}$

En résumé : Il sera possible d'échantillonner un signal à bande étroite  $[-f_M, -f_m] \cup [f_m, f_M]$  à une fréquence d'échantillonnage  $f_e < 2f_M$  si et seulement si  $\exists n \in \mathbb{N}$  tel que  $n < \frac{f_m}{f_M - f_m}$ .

Si il est possible de trouver une ou plusieurs valeurs de  $n$  répondant à cette condition, à chaque valeur trouvée correspondra un intervalle de fréquence fourni par la relation [8.4] à l'intérieur duquel on pourra choisir la fréquence d'échantillonnage  $f_e$ .

Exemple : Soit  $f_m = 8$  KHz et  $f_M = 10$  KHz.

$\frac{f_m}{f_M - f_m} = 4$  et il existe 4 entiers répondant à la condition :  $n = 0, 1, 2$  ou  $3$

- si  $n=0$   $\frac{2f_M}{n+1} = 2f_M = 20 \text{ KHz} < f_e < \frac{2f_m}{n} = +\infty$

on retrouve ici la condition de Shannon  $f_e > 2f_M = 20 \text{ KHz}$

- si  $n=1$   $\frac{2f_M}{n+1} = 10 \text{ KHz} < f_e < \frac{2f_m}{n} = 16 \text{ KHz}$  soit  $f_e \in [10 \text{ KHz}, 16 \text{ KHz}]$

- si  $n=2$   $\frac{2f_M}{n+1} = 6,66 \text{ KHz} < f_e < \frac{2f_m}{n} = 8 \text{ KHz}$  soit  $f_e \in [6,66 \text{ KHz}, 8 \text{ KHz}]$

- si  $n=3$   $\frac{2f_M}{n+1} = 5 \text{ KHz} < f_e < \frac{2f_m}{n} = 5,33 \text{ KHz}$  soit  $f_e \in [5 \text{ KHz}, 5,33 \text{ KHz}]$

On remarque que la fréquence d'échantillonnage peut être choisie dans une bande de fréquences d'autant plus basses que  $n$  est grand.



## Enoncés d'exercices

### Exercice VIII.1

On considère le signal  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \frac{\sin(2\pi B t)}{\pi t}$  avec  $B < f_0$

1 - Calculer et dessiner  $X(f)$ .

Déterminer la valeur de la fréquence d'échantillonnage minimale.

2 - On suppose  $B = \frac{f_0}{6}$ , on échantillonne le signal à la fréquence  $f_e = \frac{4f_0}{3}$ .

Représenter graphiquement le spectre du signal échantillonné.

Quel traitement faut-il faire subir au signal échantillonné pour reconstituer  $x(t)$  ?

### Exercice VIII.2 Echantillonnage d'un signal "bande étroite".

Soit un signal dont le spectre est contenu dans la bande  $[8,5 \text{ KHz}, 10 \text{ KHz}]$ .

Quelles sont les fréquences d'échantillonnage possibles ?

### Exercice VIII.3 : Échantillonneur bloqueur d'ordre 0

Un signal  $x(t)$  déterministe, de transformée de Fourier  $X(f)$  et de densité spectrale de puissance  $S_{xx}(f)$  à support borné :  $[-f_M, +f_M]$  est échantillonné à une fréquence  $f_e = \frac{1}{T_e}$  ( $f_e > 2f_M$ ).

L'échantillonneur est de type "bloqueur" et la durée de chaque échantillon est égale à  $T_e$ .

Le signal échantillonné a pour expression :  $\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \Pi_{T_e}(t - kT_e)$

1 - Calculer  $\tilde{X}(f)$ , la TF de  $\tilde{x}(t)$ , que l'on exprimera en fonction de  $X(f)$  et donner une interprétation graphique sommaire de l'opération dans les domaines temporel et fréquentiel (vous vous fixerez des formes arbitraires pour  $x(t)$  et  $X(f)$ ).

2 - Pour restituer le signal initial on opère un filtrage passe-bas sur  $\tilde{x}(t)$ . Le filtre utilisé est supposé idéal, de gain = 1, de phase = 0 et de fréquence de coupure  $f_c \in [f_M, f_e - f_M]$ . Soit  $x_0(t)$  le signal de sortie du filtre et  $X_0(f)$  sa TF.

En interprétant l'action du filtre sur le signal dans le domaine fréquentiel (éventuellement à l'aide d'un dessin), donner l'expression de  $X_0(f)$  et en déduire celle de  $x_0(t)$ .

3 - On désigne par  $e(t)$  le signal d'erreur de restitution :  $e(t) = x(t) - x_0(t)$ .

Montrer que l'on peut interpréter  $e(t)$  comme résultant d'un filtrage L.I.T. de  $x(t)$  en précisant la réponse impulsionnelle et la fonction de transfert du filtre.

4 - Donner l'expression de la densité spectrale de puissance de  $e(t)$ .

5 - Evaluer la puissance de  $e(t)$  dans le cas où  $x(t) = A \cos(2\pi f_m t)$  avec  $f_e = 4f_m$  et la comparer avec la puissance du signal  $x(t)$ .



## IX. Signaux à temps discret

---

### I. Généralités

Nous avons vu précédemment que l'échantillonnage idéal à la fréquence  $f_e = \frac{1}{T_e}$  d'un signal à temps continu  $x(t)$  fournit le signal  $\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e)$  qui est encore un signal à temps continu.

Si on désire ne s'intéresser qu'aux valeurs prises par le signal  $x(t)$  aux instants significatifs  $kT_e$  on sera amené à ne considérer que la suite des amplitudes des échantillons c'est à dire à la suite numérique des  $x(kT_e)$ . Cette suite de nombres peut s'écrire plus simplement  $x(k)$   $k \in \mathbb{Z}$  après avoir normalisé le temps et la fréquence en posant  $T_e = 1$  et  $f_e = 1$ . Le temps représenté par la variable  $k \in \mathbb{Z}$  a été "discrétisé".

Cet exemple montre une origine ou une interprétation possible des signaux à temps discret mais ce n'est pas la seule.

De façon plus générale un signal à temps discret est une suite de nombres (réels ou complexes)  $x(k)$   $k \in \mathbb{Z}$ .

#### Exemples de signaux à temps discret :

1°) L'impulsion unité  $\delta(k)$

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque : Ne pas confondre  $\delta(k)$  avec l'impulsion de Dirac.

2°) Le signal "échelon unité"

$$u(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

3°) Le signal "porte" de longueur N

$$\Pi_N(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut transposer aux signaux à temps discret les principaux concepts définis pour les signaux à temps continu :

- Périodicité :

$x(k)$  est périodique, de période  $N$  si  $N$  est le plus petit entier tel que  $x(k + N) = x(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ .

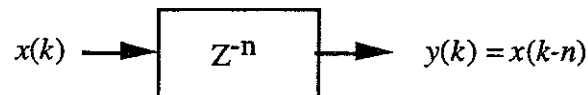
- Energie et puissance :

Energie 
$$E = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)|^2$$

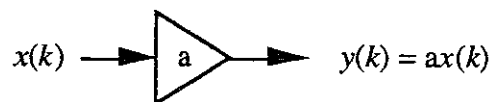
Puissance 
$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{+N} |x(k)|^2$$

Principales opérations :

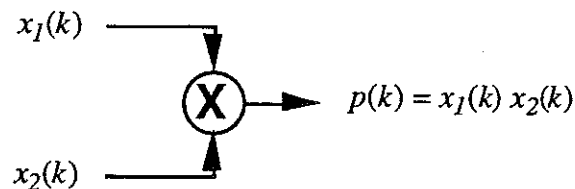
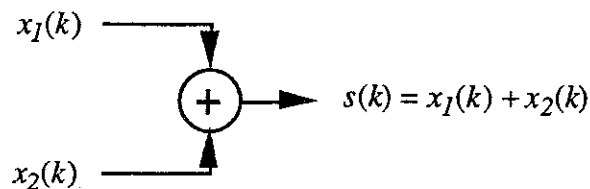
- Décalage dans le temps :  $y(k) = x(k - n)$



- Multiplication par un scalaire :  $y(k) = a x(k)$



- Somme et produit :



- Produit de convolution : 
$$z(k) = x(k) * y(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) y(k-n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) x(k-n)$$

**Remarque :** L'impulsion unité permet de décomposer tout signal  $x(k)$  sous forme d'une combinaison linéaire de signaux  $\delta(k-n)$  :

$$x(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \delta(k-n)$$

soit encore  $x(k) = x(k) * \delta(k)$ .

## II. Transformée en Z - Transformée de Fourier.

### II.1 Transformée en Z

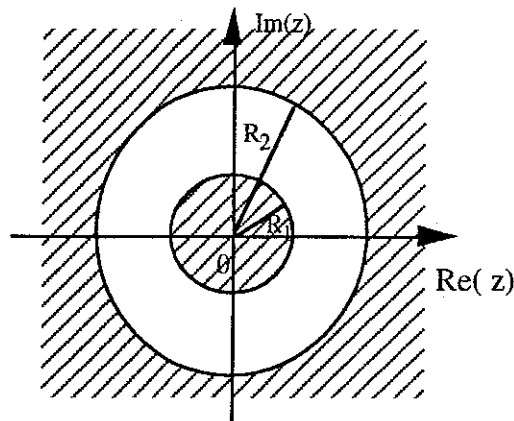
A tout signal  $x(k)$  on peut associer de façon formelle une transformée en Z, notée  $X(z)$  par :

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-k} \quad z \in \mathbb{C}$$

Il s'agit d'une série de Laurent qui ne peut être interprétée comme une fonction de la variable complexe  $z$  que si on précise le domaine de convergence de cette série.

Dans le plan complexe le domaine de convergence de ce type de série est un disque ouvert :

$$R_1 < |z| < R_2$$



Le domaine de convergence de la série fait partie intégrante de la définition de la transformée en  $z$  car une expression  $X(z)$  peut être la transformée en  $z$  de plusieurs signaux différents si on ne précise pas le domaine de convergence comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple :

Soient les signaux :  $\begin{cases} x_1(k) = a^k u(k) \\ x_2(k) = -a^k u(-k-1) \end{cases} \quad 0 < a < 1$

Calculons leur transformée en  $z$  :

$$X_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (az^{-1})^k = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad \text{si } |z| > a$$

$$X_2(z) = -\sum_{k=-\infty}^{-1} a^k z^{-k} = -\sum_{k=1}^{+\infty} a^{-k} z^k = -a^{-1} z \sum_{k=0}^{+\infty} a^{-k} z^k$$

$$X_2(z) = -a^{-1} z \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^k = -a^{-1} z \left( \frac{1}{1-\frac{z}{a}} \right) = -\left( \frac{a^{-1} z}{1-\frac{z}{a}} \right)$$

$$X_2(z) = -\left( \frac{1}{az^{-1}-1} \right) = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad \text{si } |z| < a$$

$x_1(k)$  et  $x_2(k)$  sont donc 2 signaux différents admettant des transformées en  $z$  ayant même expression mais sur des domaines différents.

$x_1(k)$  sera dit causal et  $x_2(k)$  anti-causal.

Théorème du retard :

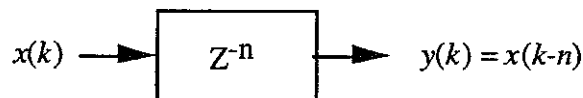
$$\text{Si } y(k) = x(k-n) \text{ alors } Y(z) = z^{-n} X(z)$$

En effet :

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(k) z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k-n) z^{-k} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l) z^{-l-n}$$

$$Y(z) = z^{-n} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l) z^{-l} = z^{-n} X(z)$$

D'ou la représentation conventionnelle :



Théorème relatif au produit de convolution :

$$\text{Soient } \begin{cases} x(k) \xrightarrow{\mathcal{I}\mathcal{Z}} X(z) \text{ sur le domaine } D_x \\ y(k) \xrightarrow{\mathcal{I}\mathcal{Z}} Y(z) \text{ sur le domaine } D_y \end{cases}$$

$$\text{et soit } w(k) = x(k) * y(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(k-n) y(n) \quad \text{sur le domaine } D_x \cap D_y$$

$$\text{Alors } X(z) Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) z^{-m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) z^{-n} = \sum_m \sum_n x(m) y(n) z^{-(m+n)}$$

$$\text{soit } X(z)Y(z) = \sum_k \sum_n x(k-n)y(n)z^{-k}$$

$$\text{or } \sum_n x(k-n)y(n) = w(k)$$

donc :

$$\boxed{x(k) * y(k) \xrightarrow{TZ} X(z)Y(z)}$$

### Inversion de la transformée en Z

Nous savons que toute fonction holomorphe  $X(z)$  définie dans un disque ouvert  $D = R_1 < |z| < R_2$  peut y être développée en série de Laurent sous la forme  $X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-k}$ . Le problème de l'inversion de la transformée en Z consiste à déterminer  $x(k)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  à partir de  $X(z)$ .

La réponse générale à ce problème nous est fournie par la formule de Cauchy :

$$\boxed{x(k) = \frac{1}{2i\pi_c} \int X(z) z^{k-1} dz \quad \forall k \in \mathbb{Z}}$$

où C est un chemin quelconque, inclus dans D, entourant l'origine et parcouru dans le sens direct. Le calcul pratique de  $x(k)$  peut se faire en s'appuyant effectivement sur cette formule et en utilisant le théorème des résidus. Toutefois, lorsque  $X(z)$  se présente sous la forme particulière d'une fraction rationnelle en z, la méthode précédente pourra avantageusement être remplacée par une méthode reposant sur le principe d'une décomposition de la fraction rationnelle en éléments simples (cf exercice).

## II.2 Transformée de Fourier

Définition :

$$\boxed{X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-i2\pi kf}} \quad [1]$$

On remarque que la transformée de Fourier est égale à la transformée en z évaluée sur le cercle unité. En conséquence la transformée de Fourier d'un signal n'est définie que si le cercle unité appartient au domaine de convergence de la transformée en z de ce signal.

Propriétés :

- Périodicité :  $X(f)$  est périodique de période 1.

En effet  $e^{-i2\pi k(f+1)} = e^{-i2\pi kf}$  puisque  $e^{-i2\pi k} = 1$ , donc  $e^{-i2\pi kf}$  est périodique, de période 1 et par suite  $X(f)$  l'est également. On peut donc restreindre l'étude de  $X(f)$  à l'intervalle  $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$  appelé intervalle principal.

Remarque : Si le signal à temps discret provient de l'échantillonnage d'un signal à temps continu il est bon de se souvenir que la fréquence a été normalisée en posant  $f_e = 1$ .

D'autre part la formule [1] n'est autre que la décomposition en série de Fourier de la fonction périodique  $X(f)$ , les  $x(k)$  apparaissent alors comme les coefficients de cette décomposition.

De ce fait :

$$x(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} X(f) e^{i2\pi kf} df$$

La transformée de Fourier d'un signal à temps discret jouit des mêmes propriétés que la TF d'un signal à temps continu. En particulier :

- Si  $x(k)$  est réel  $X(f)$  est à symétrie hermitienne :  $X(-f) = \overline{X(f)}$  On peut alors restreindre le domaine d'étude à l'intervalle  $\left[0, +\frac{1}{2}\right]$ .

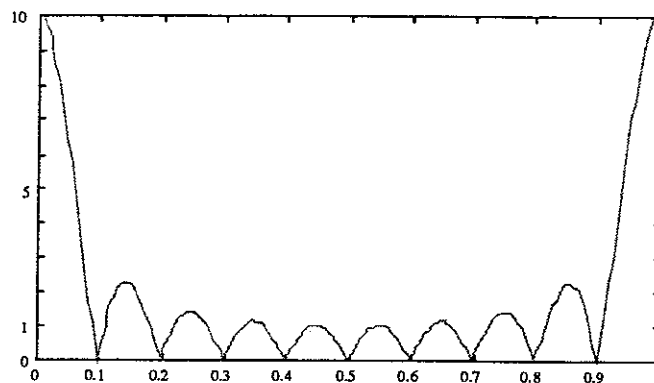
- Théorème du retard :

$$x(k-n) \xrightarrow{TF} X(f) e^{-i2\pi nf}$$

Exemple : Soit  $x(k) = \Pi_N(k)$

$$X(f) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i2\pi kf} = \frac{1 - e^{-i2\pi Nf}}{1 - e^{-i2\pi f}} = \frac{e^{-i\pi Nf} [e^{i\pi Nf} - e^{-i\pi Nf}]}{e^{-i\pi f} [e^{i\pi f} - e^{-i\pi f}]}$$

$$X(f) = \frac{\sin \pi Nf}{\sin \pi f} e^{-i\pi(N-1)f}$$



$|X(f)|$  pour  $N=10$

## Enoncés d'exercices

### Exercice IX.1

Calculer les signaux à temps discret dont la transformée en Z a pour expression

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$$

### Exercice IX.2 Fenêtres de pondération temporelle

L'objet de l'exercice est d'étudier quelques fenêtres de pondération pouvant être utilisées pour la conception de filtres numériques.

1. Fonction porte de largeur N

$$\text{Soit } g_1(k) = \prod_N(k) \text{ i.e. } g_1(k) = \begin{cases} 1 & \forall k \in \{0, N-1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer la transformée de Fourier  $G_1(f)$  de  $g_1(k)$  et tracer  $|G_1(f)|$  pour  $N=4$ .

2. Fonction triangle de largeur  $N+2$

$$\text{Soit } g_2(k) = \begin{cases} 1 - \frac{2|k|}{N+1} & \forall k, |k| \leq \frac{N+1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Représenter  $g_2(k)$ .

On suppose que  $N=4P+1$ . Montrer qu'alors  $g_2(k)$  correspond, à une constante près, au produit de convolution  $\prod_{2P+1}(k+p) * \prod_{2P+1}(k+p)$ .

En déduire  $G_2(f)$ , la transformée de Fourier de  $g_2(k)$  et tracer  $|G_2(f)|$  pour  $P=1$  ( $N=5$ ).

3. Fenêtre de Hamming

$$\text{Soit } g_3(k) = \begin{cases} a + (1-a) \cos \frac{2\pi k}{N} & \forall k, |k| \leq \frac{N-1}{2} \quad a \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Représenter  $g_3(k)$ . On pose  $N=2P+1$ .

En remarquant que :

$$g_3(k) = \left[ a + \frac{(1-a)}{2} \left( e^{i\frac{2\pi k}{N}} + e^{-i\frac{2\pi k}{N}} \right) \right] \prod_{2P+1}(k+p)$$

Calculer  $G_3(f)$ , la transformée de Fourier de  $g_3(k)$  et tracer  $|G_3(f)|$  pour  $P=2$  ( $N=5$ ) et  $a=0.5$ .

**Exercice IX.3 Echantillonnage d'un signal à temps discret.**

Soit un signal à temps discret  $x(k)$  dont la TF  $X(f)$  est nulle pour  $B < |f| < \frac{1}{2}$ .

1 - Développer en série de Fourier la restriction de  $X(f)$  à  $[-B', +B']$  (où  $B \leq B' < \frac{1}{2}$ ).

Montrer que si  $B \leq \frac{1}{4}$  il est possible de reconstituer  $x(k)$  à partir des valeurs  $x(kP)$  où  $P \geq 2$

$P \in \mathbb{N}$ .

Déterminer la plus grande valeur de  $P$  associée à  $B$ .

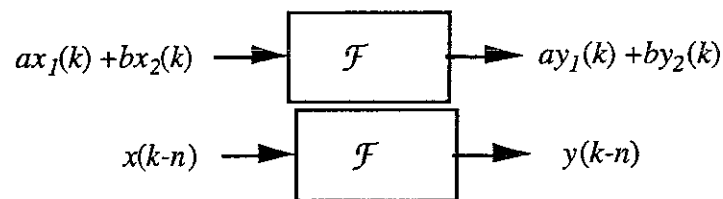
2 - Interpréter le résultat du 1° lorsque  $x(k)$  est issu de l'échantillonnage à la fréquence  $f_e$  d'un signal à temps continu  $x(t)$ .



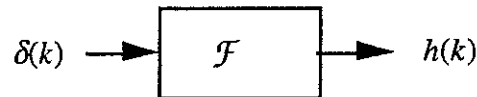
## X. Filtrage à temps discret

### I. Filtrage linéaire et invariant dans le temps.

#### I.1 Définitions



Réponse impulsionnelle :



Comme

$$y(k) = \mathcal{F}[x(k)] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\delta(k-n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[x(n)\delta(k-n)]$$

$$y(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\mathcal{F}[\delta(k-n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h(k-n)$$

donc

$$\boxed{\begin{array}{c} y(k) = x(k) * h(k) \\ \Downarrow \\ Y(z) = X(z)H(z) \end{array}}$$

avec  $h(k) \xrightarrow{TZ} H(z)$        $H(z)$  est la fonction de transfert en  $z$  du filtre.

Exemple : L'opération de retard  $y(k) = x(k-n)$  correspond à un filtrage LIT de réponse impulsionnelle  $h(k) = \delta(k-n)$  et donc de fonction de transfert en  $z$   $H(z) = z^{-n}$ .

### 1.2 Equations de récurrence linéaire, à coefficients constants.

Aux équations différentielles linéaires, à coefficients constants des FLIT à temps continu correspondent les équations de récurrence linéaire, à coefficients constants pour les FLIT à temps discret. Nous nous limiterons dans la suite aux filtres dont la relation entrée-sortie est régie par ce type d'équation.

La sortie  $y(k)$  est alors reliée à l'entrée  $x(k)$  par une relation de la forme :

$$\boxed{\sum_{n=0}^N a_n y(k-n) = \sum_{j=0}^P b_j x(k-j) \quad a_0 \neq 0} \quad [2]$$

$$\text{soit } y(k) = \frac{1}{a_0} \left[ \sum_{j=0}^P b_j x(k-j) - \sum_{n=1}^N a_n y(k-n) \right]$$

En appliquant la TZ à la relation [2] il vient :

$$\sum_{n=0}^N a_n z^{-n} Y(z) = \sum_{j=0}^P b_j z^{-j} X(z) \quad \text{d'où}$$

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{j=0}^P b_j z^{-j}}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}}}$$

Aspect réalisation : Quelle est la réponse impulsionnelle d'un tel filtre ?

A une expression  $H(z)$  donnée ne correspond en général pas une réponse impulsionnelle unique mais plusieurs réponses  $h(k)$  en fonction du domaine de convergence choisi. Une seule sera causale à condition toutefois que le degré du numérateur de  $H(z)$  en tant que fraction rationnelle en  $z$  soit inférieur ou égal au degré du dénominateur.

Exemple :

$$y(k) + ay(k-1) + by(k-2) = x(k)$$

$$Y(z) + az^{-1}Y(z) + bz^{-2}Y(z) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + az^{-1} + bz^{-2}} = \frac{1}{(1 - P_1 z^{-1})(1 - P_2 z^{-1})}$$

$P_1$  et  $P_2$  sont les pôles de  $H(z)$  ou encore du filtre correspondant.

Décomposons la fraction rationnelle  $H(z)$  en éléments simples :

$$H(z) = \frac{A}{(1 - P_1 z^{-1})} + \frac{B}{(1 - P_2 z^{-1})} = H_1(z) + H_2(z)$$

$$H_1(z) \xrightarrow{TZ^{-1}} \begin{cases} h_1(k) \text{ causale si } |z| > |P_1| \\ \text{ou} \\ h'_1(k) \text{ non causale si } |z| < |P_1| \end{cases}$$

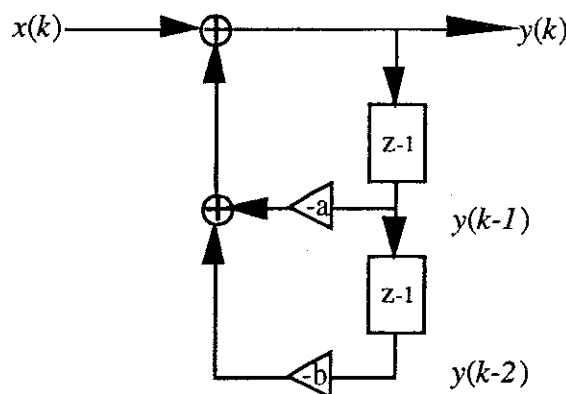
$$H_2(z) \xrightarrow{TZ^{-1}} \begin{cases} h_2(k) \text{ causale si } |z| > |P_2| \\ \text{ou} \\ h'_2(k) \text{ non causale si } |z| < |P_2| \end{cases}$$

Il existe donc 3 antécédents possibles à  $H(z)$  :

$$H(z) \xrightarrow{TZ^{-1}} \begin{cases} h_1(k) + h_2(k) \text{ causale si } |z| > \text{Sup}(|P_1|, |P_2|) \\ \text{ou} \\ h'_1(k) + h'_2(k) \text{ anti-causale si } |z| < \text{Inf}(|P_1|, |P_2|) \\ \text{ou} \\ \left. \begin{array}{l} h_1(k) + h'_2(k) \text{ si } |P_1| < |z| < |P_2| \\ \text{ou} \\ h'_1(k) + h_2(k) \text{ si } |P_2| < |z| < |P_1| \end{array} \right\} \text{ni causales, ni anti-causales} \end{cases}$$

A quoi correspondent ces différentes solutions ?

- Solution causale :  $y(k) = x(k) - ay(k-1) - by(k-2)$



La réponse impulsionnelle peut être obtenue de la façon suivante :

$$H_1(z) = \frac{A}{(1 - P_1 z^{-1})} = A \sum_{k=0}^{+\infty} P_1^k z^{-k}$$

$$\text{d'où} \quad h_1(k) = \begin{cases} AP_1^k & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{sur le domaine } |z| > |P_1|$$

$$\text{de même} \quad h_2(k) = \begin{cases} BP_2^k & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{sur le domaine } |z| > |P_2|$$

$$\text{d'où enfin} \quad h(k) = h_1(k) + h_2(k) = \begin{cases} AP_1^k + BP_2^k & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{sur le domaine } |z| > \sup(|P_1|, |P_2|)$$

$$\text{- Solution anti-causale : } y(k+2) + ay(k+1) + by(k) = x(k+2)$$

$$\text{soit } y(k) = \frac{1}{b} [x(k+2) - y(k+2) - ay(k+1)]$$

$$\text{- Solution ni causale, ni anti-causale : } y(k+1) + ay(k) + by(k-1) = x(k+1)$$

$$\text{soit } y(k) = \frac{1}{a} [x(k+1) - y(k+1) - by(k-1)]$$

$$\text{Plus généralement à } H(z) = \frac{\sum_{j=0}^P b_j z^{-j}}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}} = \frac{b_0 \prod_{j=0}^P (1 - N_j z^{-1})}{a_0 \prod_{n=0}^N (1 - P_n z^{-1})} \quad \text{ne correspond qu'une seule réponse}$$

impulsionnelle  $h(k)$  causale associée au domaine de définition  $|z| > \sup_i |P_i|$  à condition que le degré du numérateur de  $H(z)$  en tant que fraction rationnelle en  $z$  soit inférieur ou égal au degré du dénominateur.

Les  $N_j$  sont les zéros du filtre, les  $P_n$  sont les pôles et les  $b_j$  et  $a_n$  en sont les coefficients.

**Remarque :** Pour que le filtre soit réalisable il faut que les coefficients soient réels donc que les zéros et les pôles soient réels ou complexes conjugués.

Fonction de transfert en  $f$  :

La fonction de transfert en  $f$  est égale à la fonction de transfert en  $z$  évaluée sur le cercle unité.

$$H(f) = H(z) \Big|_{z=e^{i2\pi f}}$$

Interprétation géométrique :

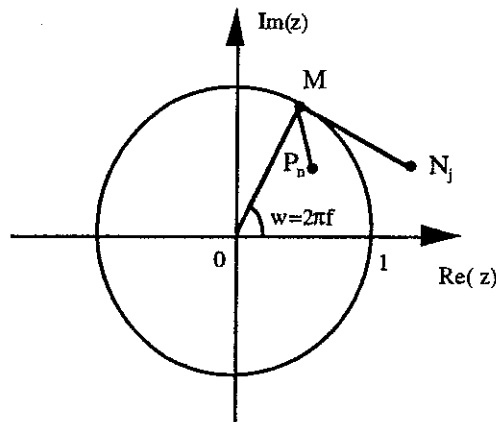
$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^P b_j z^{-j}}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}} = \frac{b_0 \prod_{j=1}^P (1 - N_j z^{-1})}{a_0 \prod_{n=1}^N (1 - P_n z^{-1})} = \frac{b_0}{a_0} z^{N-P} \frac{\prod_{j=1}^P (z - N_j)}{\prod_{n=1}^N (z - P_n)}$$

d'où

$$|H(z)| = \left| \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{j=1}^P |z - N_j|}{\prod_{n=1}^N |z - P_n|} \right| |z|^{N-P} \quad \text{et} \quad |H(f)| = \left| \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{j=1}^P |z - N_j|}{\prod_{n=1}^N |z - P_n|} \right|_{z=e^{i2\pi f}}$$

On peut alors remarquer que  $|z - N_j|$  (respectivement  $|z - P_n|$ ) représente la distance d'un point courant M d'affixe z au zéro  $N_j$  (respectivement au pôle  $P_n$ ).

En particulier, en faisant décrire au point courant M le cercle unité (pour parcourir le domaine des fréquences de 0 à 1) on peut alors, grâce à la formule précédente, esquisser la forme générale de  $|H(f)|$ .



**Stabilité :**

Comme pour les filtres à temps continu, un filtre sera stable si sa réponse à tout signal borné est borné; une condition équivalente est que  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < +\infty$ .

Cette condition est elle-même équivalente au fait que la série  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)z^{-k}$  est absolument convergente sur le cercle unité, donc que le cercle unité appartienne au domaine de convergence de  $H(z)$ , soit en définitive que tous les pôles du filtre soient strictement à l'intérieur du cercle unité.

En résumé, un filtre est causal et stable si et seulement si le degré du numérateur de  $H(z)$  en tant que fraction rationnelle en  $z$  est inférieur ou égal au degré du dénominateur et tous les pôles du filtre sont strictement à l'intérieur du cercle unité.

## II Filtres à réponse impulsionnelle finie ou infinie.

Les filtres régis par une équation de récurrence linéaire à coefficients constants sont donc caractérisés par une fonction de transfert en  $z$   $H(z)$  qui se présente sous la forme d'une fraction rationnelle. Ils se répartissent en 3 catégories :

### II.1 Les filtres transversaux ou à réponse impulsionnelle finie (RIF)

Ce sont les filtres pour lesquels  $H(z)$  est simplement un polynôme en  $z$  ( $N=0$ ). Nous conviendrons en outre que  $a_0=1$  pour simplifier l'écriture.

La relation entrée-sortie est alors :

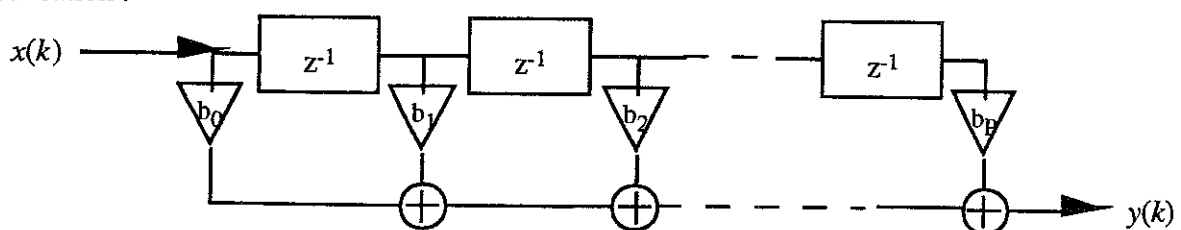
$$y(k) = \sum_{j=0}^P b_j x(k-j)$$

d'où

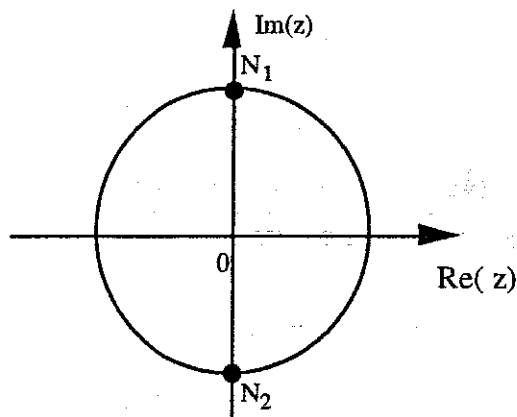
$$H(z) = \sum_{j=0}^P b_j z^{-j} \quad (P = \text{ordre du filtre})$$

La réponse impulsionnelle est donc  $h(k) = \begin{cases} b_k & \text{pour } 0 \leq k \leq P \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Réalisation :



Exemple : Filtre réjecteur de la fréquence 1/4

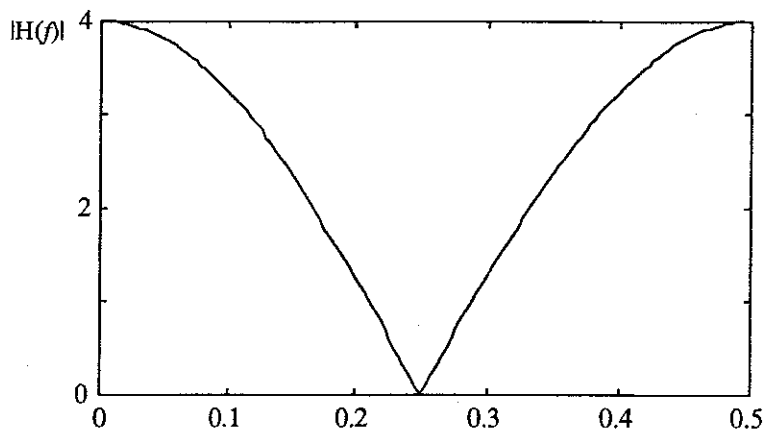


$N_1 = +i \quad N_2 = -i$

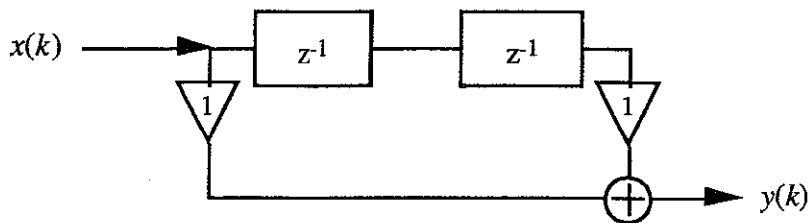
$H(z) = (1 - iz^{-1})(1 + iz^{-1}) = 1 + z^{-2}$

$H(f) = 1 + e^{-i4\pi f}$

$|H(f)|^2 = (1 + e^{-i4\pi f})(1 + e^{+i4\pi f}) = 2 + 2\cos(4\pi f) = 2[1 + \cos(4\pi f)]$

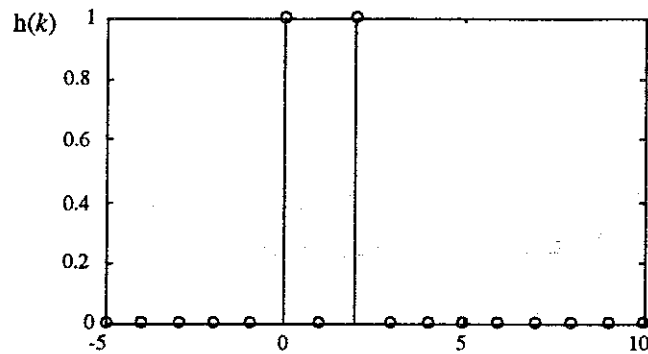


Réalisation :



Réponse impulsionnelle :

$$h(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \text{ ou } k = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



## II.2 Les filtres purement récurrents (tous pôles)

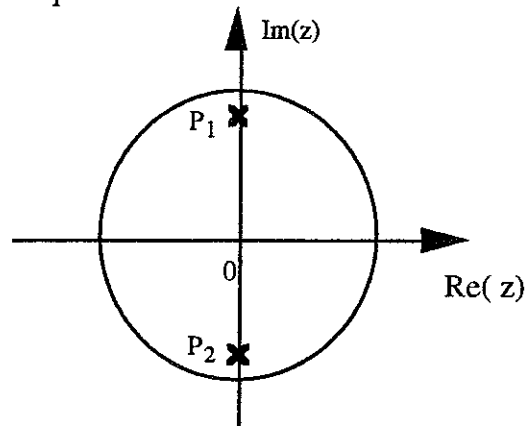
Ils sont définis par une relation entrée-sortie de la forme :

$$y(k) = bx(k) - \sum_{n=1}^N a_n y(k-n) \quad (a_0 = 1)$$

Soit, par une fonction de transfert de la forme :

$$H(z) = \frac{b}{1 + \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}} = \frac{b}{\prod_{n=1}^N (1 - P_n z^{-1})} \quad (N = \text{ordre du filtre})$$

Exemple : Filtre sélectif à la fréquence 1/4

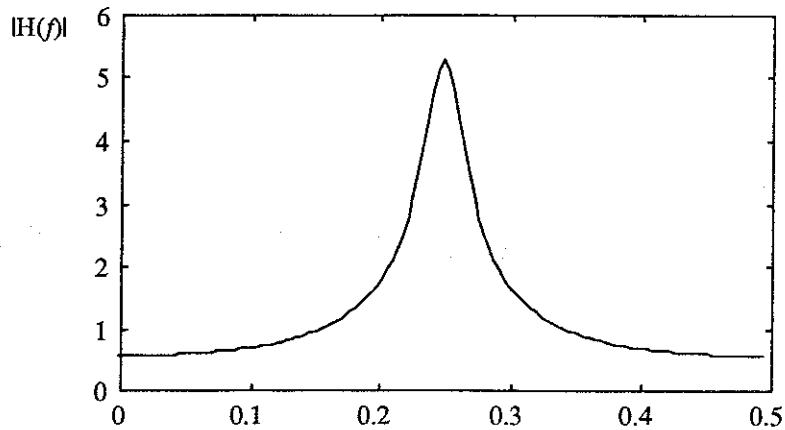


$$P_1 = +0,9i \quad P_2 = -0,9i$$

$$H(z) = \frac{1}{(1 - 0,9iz^{-1})(1 + 0,9iz^{-1})} = \frac{1}{1 - 0,81z^{-2}}$$

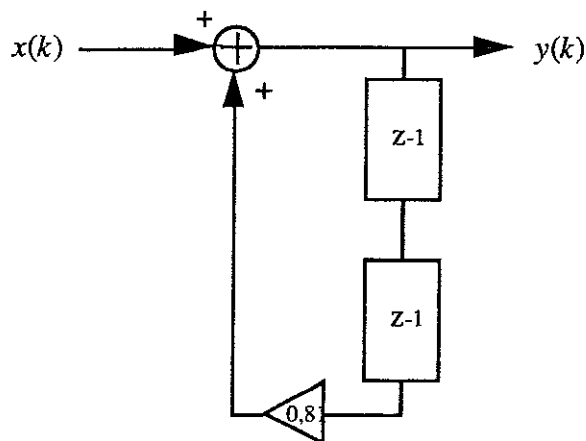
$$|H(f)|^2 = \frac{1}{(1 - 0,81e^{-4i\pi f})(1 - 0,81e^{+4i\pi f})} = \frac{1}{1 + 0,656 + 1,62 \cos(4\pi f)}$$





Réalisation :

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0,81z^{-2}} \Rightarrow y(k) = x(k) + 0,81y(k-2)$$

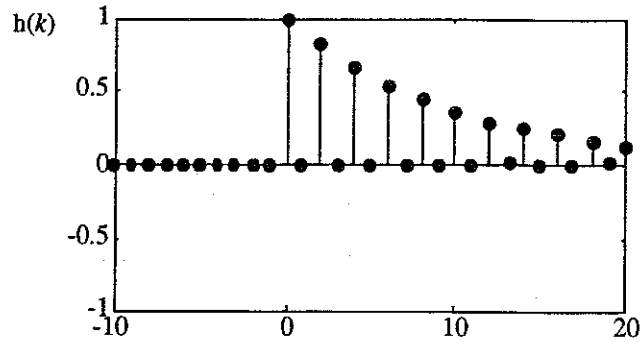


Réponse impulsionnelle :

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0,81z^{-2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (0,81z^{-2})^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (0,81)^k z^{-2k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)z^{-k}$$

donc

$$h(k) = \begin{cases} 0,81^p & \text{si } k = 2p \quad (p \geq 0) \\ 0 & \text{si } k = 2p+1 \quad (p \geq 0) \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$$



### II.3 Les filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII)

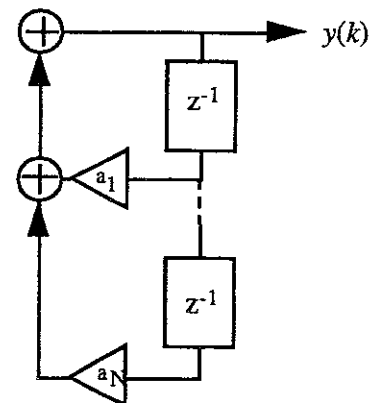
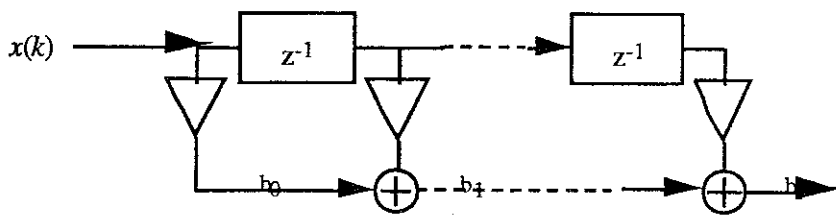
Ils sont caractérisés par une relation entrée-sortie de la forme :

$$y(k) = \sum_{j=0}^P b_j x(k-j) - \sum_{n=1}^N a_n y(k-n) \quad (a_0 = 1)$$

d'où une fonction de transfert en z de la forme :

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^P b_j z^{-j}}{1 + \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}} = \frac{b_0 \prod_{j=0}^P (1 - N_j z^{-1})}{\prod_{n=0}^N (1 - P_n z^{-1})}$$

Ils comportent donc une partie transversale et une partie réursive :



## Enoncés d'exercices

### Exercice X.1 Synthèse d'un filtre dérivateur

On se propose de réaliser un filtre permettant de dériver un signal à temps continu  $x(t)$ .

Si la fréquence maximale contenue dans le spectre de  $x(t)$  est B, quelle est la fréquence minimale d'échantillonnage pour  $x(t)$  ?

Donner l'expression de la fonction de transfert idéale du filtre numérique transformant  $x(t)$  en  $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ . En déduire la réponse impulsionnelle.

On souhaite approximer ce filtre par un filtre numérique à réponse impulsionnelle finie d'ordre 4. En utilisant les 3 fenêtres de pondération étudiées précédemment (rectangulaire, triangulaire, de Hamming), calculer la réponse impulsionnelle du filtre RIF d'ordre 4, sa transformée en z et tracer le module de la fonction de transfert en f en comparant avec le module de la fonction de transfert idéale.

### Exercice X.2

Soit le filtre numérique de zéros  $N_1 = \bar{N}_2 = \frac{1}{2}[1 + i\sqrt{3}]$ , de pôles  $P_1 = \bar{P}_2 = \frac{1}{2}[1 + i]$

- 1 - Positionner les zéros et les pôles par rapport au cercle unité. Que peut on dire de ce filtre?
- 2 - Calculer sa fonction de transfert en z et esquisser  $|H(f)|$ .
- 3 - Calculer sa réponse impulsionnelle.
- 4 - Donner le schéma de principe de la réalisation de ce filtre.



## XI. Transformée de Fourier discrète

**Rappel :** On a défini la transformée de Fourier d'un signal à temps discret  $x(k)$  par :

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-i2\pi kf}$$

Cette TF est donc une fonction de la variable continue "f", et c'est une fonction périodique de période 1.

Si on veut mettre en oeuvre le calcul de cette TF sur calculateur on est confronté à 2 difficultés :

- Le calcul ne peut se faire qu'à partir d'un nombre fini de valeurs de  $x(k)$ .
- Le calcul ne peut fournir qu'un nombre fini de valeurs évaluant  $X(f)$  pour des valeurs discrètes de la fréquence.

### I. Définition de la transformée de Fourier discrète (TFD).

A une suite  $x(0), \dots, x(n), \dots, x(N-1)$  de N valeurs la TFD associe une suite de N autres valeurs  $X(0), \dots, X(k), \dots, X(N-1)$  définies par :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i2\pi \frac{kn}{N}} \quad k \in [0, N-1]$$

La TFD est donc une application linéaire qui associe au vecteur  $(x(0), \dots, x(k), \dots, x(N-1))$  le vecteur  $(X(0), \dots, X(k), \dots, X(N-1))$ .

$$(x(0), \dots, x(k), \dots, x(N-1)) \xrightarrow{\text{TFD}} (X(0), \dots, X(k), \dots, X(N-1))$$

Soit en représentation matricielle :

En posant  $W_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ , 
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ \vdots \\ X(k) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & \dots & W^{N-1} \\ 1 & W^2 & W^4 & \dots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & \dots & W^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ \vdots \\ x(k) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

TFD inverse :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{i2\pi \frac{kn}{N}} \quad \forall n \in [0, N-1]$$

La démonstration est immédiate en remplaçant  $X_n$  par son expression donnée en définition.

## II. Approximation réalisée par la TFD.

En première approximation il semble que la TFD réalise un échantillonnage du spectre  $X(f)$  du signal  $x(k)$ .

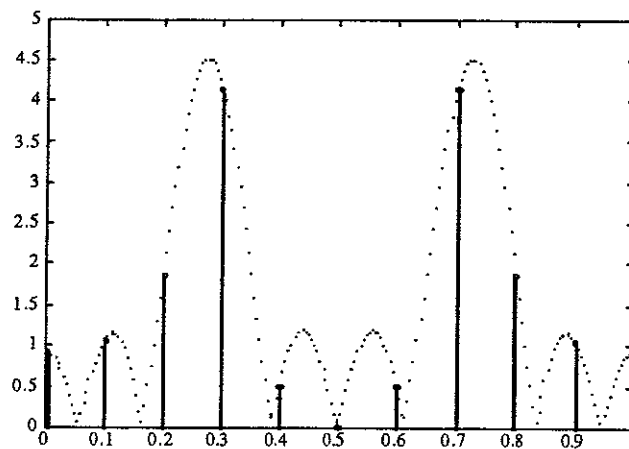
Ceci n'est rigoureusement exact que si  $x(k)$  est à durée finie  $[0, N-1]$ , c'est-à-dire nul en dehors de  $\{0, \dots, N-1\}$ . Dans le cas contraire; si  $x(k)$  est à durée finie supérieure voire infinie la TFD ne fournit que des échantillons du spectre du signal tronqué  $x(k) \Pi_N(k)$ .

Cette troncature brutale du signal peut faire apparaître des oscillations parasites dans le spectre obtenu et nécessite parfois l'usage de fenêtres de troncature ou de pondération moins brutales (fenêtres triangulaire, de Hamming, de Hanning etc...).

### Illustration :

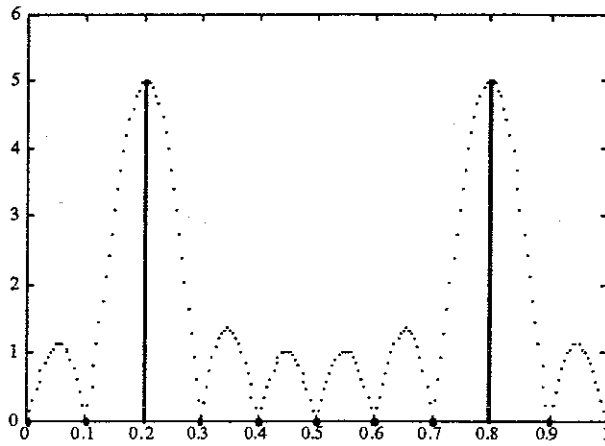
Soit  $x(k)$  résultant de l'échantillonnage d'un signal sinusoïdal de fréquence  $f_0$  et comportant  $N$  points. La TFD réalise l'échantillonnage du spectre de  $\cos(2\pi f_0 k) \prod_{NT_e}(k)$ .

Exemples :



$$f_0 = 0,275 f_e$$

$$N = 10$$



$f_0 = 0,2 f_e$        $N = 10$

### III. Principe des algorithmes rapides (FFT).

Le calcul de la TFD sous la forme  $X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}$  avec  $W_N^{kn} = e^{-i\frac{2\pi nk}{N}}$  nécessite  $N^2$  multiplications complexes (ordre de complexité =  $N^2$ ).

Si N est pair :

- pour les indices pairs  $n = 2p$        $W_N^{2pk} = e^{-i\frac{2\pi 2pk}{N}} = e^{-i\frac{2\pi pk}{\frac{N}{2}}} = W_{\frac{N}{2}}^{pk}$

- pour les indices impairs  $n = 2p+1$        $W_N^{(2p+1)k} = e^{-i\frac{2\pi(2p+1)k}{N}} = e^{-i\frac{2\pi 2pk}{N}} e^{-i\frac{2\pi k}{N}} = W_{\frac{N}{2}}^{pk} W_N^k$

En séparant les indices pairs et impairs dans la somme précédente il vient :

$$X_k = \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)W_{\frac{N}{2}}^{kn}}_{\text{TFD d'ordre } \frac{N}{2}} + W_N^k \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)W_{\frac{N}{2}}^{kn}}_{\text{TFD d'ordre } \frac{N}{2}}$$

Chacune des 2 TFD nécessitant  $\frac{N^2}{4}$  multiplications complexes, le calcul complet effectué sous cette forme n'en nécessite plus que  $\frac{N^2}{2}$ .

On remarque que le processus peut être réitéré autant de fois que l'on veut à la condition que  $N$  soit une puissance de 2 ( $N = 2^p$ ), le gain en temps de calcul est alors extrêmement appréciable.



### Formule de Cauchy et inversion de la transformée en $z$ par la méthode des résidus

Montrons tout d'abord la formule de Cauchy.

Soit  $X(z)$  une fonction holomorphe dans un disque ouvert  $D = \{R_1 < |z| < R_2\}$ . On cherche  $x(k)$

$$\text{t.q. } X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)z^{-k}.$$

On va montrer que :

$$x(k) = \frac{1}{2i\pi} \int_C X(z)z^{k-1} dz \quad [A1]$$

où  $C$  est un chemin quelconque, fermé, contenu dans le disque de convergence, entourant l'origine et parcouru dans le sens direct.

En effet :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C X(z)z^{k-1} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_C \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l)z^{-l} z^{k-1} dz$$

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C X(z)z^{k-1} dz = \frac{1}{2i\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l) \underbrace{\int_C z^{k-l-1} dz}_I$$

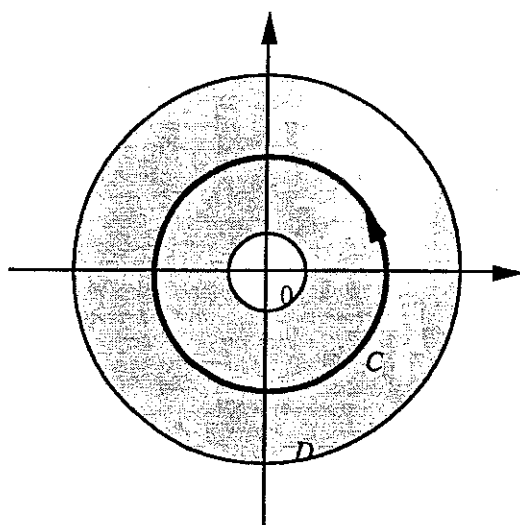
Pour simplifier le calcul de  $I$ , prenons pour  $C$  le cercle de centre 0 et de rayon  $\rho$  avec  $R_1 < \rho < R_2$ .

$$I = \int_0^{2\pi} \rho^{k-l-1} e^{i(k-l-1)\theta} \rho i e^{i\theta} d\theta = i\rho^{k-l} \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)\theta} d\theta$$

$$\text{Si } k \neq l \quad I = 0$$

$$\text{Si } k = l \quad I = 2i\pi$$

D'où le résultat annoncé.

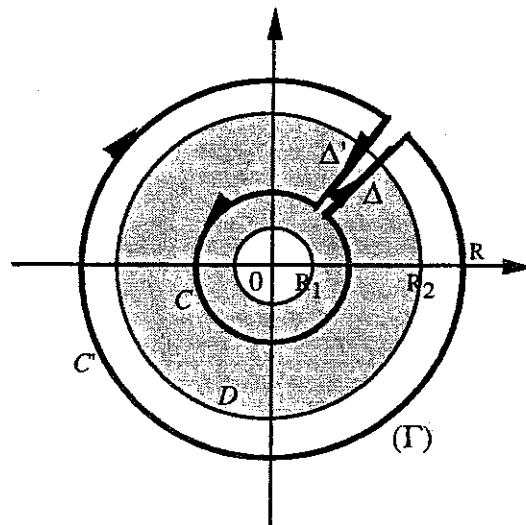


Le calcul pratique pourra se faire en utilisant la formule des résidus soit :

$$x(k) = \sum_{|a_j| \leq R_1} \text{Res}(X(z)z^{k-1}, a_j) \quad [\text{A2}]$$

en sommant sur l'ensemble des pôles intérieurs à  $C$  soit en fait intérieurs au cercle de rayon  $R_1$ .

L'application de la formule [A2] est relativement simple tant que  $X(z)z^{k-1}$  n'admet pas de pôle d'ordre trop élevé. Cependant il existe un entier  $k_0$  tel que pour  $k < k_0$ , 0 devient un pôle multiple d'ordre d'autant plus élevé que  $|k|$  est grand. Pour éviter des calculs fastidieux, on applique la formule [A2] au contour  $\Gamma = C \cup \Delta \cup \Delta' \cup C'$  parcouru dans le sens direct. Ainsi le point 0 n'est plus à l'intérieur de  $\Gamma$ .



On obtient alors :

$$-\int_C X(z)z^{k-1} dz + \int_{C'} X(z)z^{k-1} dz = 2i\pi \left[ \sum_{|a_j| \geq R_2} \text{Res}(X(z)z^{k-1}, a_j) \right]$$

Soit, en faisant tendre  $R$  vers l'infini et à condition que  $k$  soit t.q.  $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |X(z)z^k| = 0$  pour pouvoir appliquer le lemme de Jordan :

$$x(k) = - \sum_{|a_j| \geq R_2} \text{Res}(X(z)z^{k-1}, a_j) \quad [\text{A3}]$$

## Bibliographie

- BLANC-LAPIERRE A.  
et PICINBONO B. Fonctions aléatoires  
Masson
- BELLANGER M. Traitement numérique du signal  
Collection CNET-ENST, Masson
- BREMAUD P. Théorie du signal  
ENSTA
- CHARBIT M. Eléments de théorie du signal : les signaux aléatoires  
Ellipses
- DE COULON F. Théorie et traitement des signaux  
Dunod
- DELMAS J.P. Eléments de théorie du signal : les signaux déterministes  
Ellipses
- DUPRAZ J. Probabilités, signaux et bruits  
Eyrolles
- KAILATH T. Linear systems  
Prentice-Hall
- KUNT M. Traitement numérique des signaux  
Dunod
- PAPOULIS A. Signal analysis  
McGraw-Hill
- PICINBONO B. Théorie des signaux et des systèmes  
Dunod
- PICINBONO B. Signaux aléatoires  
Dunod
- ROUBINE E. Introduction à la théorie de la communication  
Masson



## INDEX

- bruit blanc 31
- Causalité 40
- convolution 8
- critère de Shannon 73
- densité spectrale d'énergie 17
- densité spectrale de puissance 20
- Distorsion 42
- échantillonneur bloqueur 75
- échantillonneur suiveur 73
- échelon unité 83
- énergie 3
- enveloppe complexe 59; 63
- ergodicité 27
- Fenêtre de Hamming 89
- Fenêtres de pondération 89
- Filtre passe-bande idéal 43
- Filtre passe-bas idéal 43
- filtre réalisable 40
- filtres transversaux 96
- FLIT 37
- fonction
  - échelon unité 7
  - porte 7
  - fonction d'autocorrélation 18
  - fonction d'intercorrélation 18
  - fonction de transfert 39; 94
- gain 39
- impulsion de Dirac 8
- impulsion unité 83
- peigne de Dirac 71
- processus aléatoire 25
- Produit de convolution 84
- puissance 3
- réponse impulsionnelle 38
- série de Fourier 9
- signal 1
  - aléatoire 2
  - déterministe 2
  - signal à bande étroite 59
  - Signal analytique 62
  - signaux à temps discret 83
  - spectre 11
  - Stabilité 41
  - stationnarité 27
  - symétrie hermitienne 12
  - Théorème de Plancherel 13
  - théorème de Wiener-Kintchine 30
  - Transformation de Fourier 11
  - transformée de Fourier 87
  - transformée de Fourier discrète 103
  - Transformée de Hilbert 59
  - Transformée en Z 85

