Exercices

(d'après examens des années précédentes)

Signaux déterministes à temps continu

Exercice 1: distribution de Dirac

1. Pour tout entier $n \geq 1$, soit $\phi_n(t) = ne^{-\pi n^2 t^2}$.

(a) Faire un tracé des fonctions ϕ_n et donner la limite de la suite de fonctions $(\phi_n)_{n\geq 1}$ (convergence simple).

(b) Montrer que pour toute fonction f bornée et continue en 0, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(t)f(t)\,dt = f(0)\,.$$

2. Pour tout entier $n \geq 1$, soit $\phi_n(t) = n\mathbb{1}_{[-1/2n,1/2n]}(t)$.

(a) Faire un tracé des fonctions ϕ_n et donner la limite de la suite de fonctions $(\phi_n)_{n\geq 1}$ (convergence simple).

(b) Montrer que pour toute fonction f continue en 0, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(t)f(t)\,dt = f(0)\,.$$

3. Vérifier que les résultats précédents se généralisent en prenant $\phi_n(t) = n\phi(nt)$ dans les cas suivants :

(a) $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est intégrable, $\int_{\mathbb{R}} \phi(t)\,dt = 1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et bornée.

(b) $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, de support borné, $\int_{\mathbb{R}} \phi(t)\,dt = 1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

4. Soit la fonction $\phi(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$ que l'on suppose prolongée par continuité en zéro et, pour tout entier $n \geq 1$, soient $\phi_n(t) = n\phi(nt)$. Nous admettrons (cf. cours de maths) :

- (lemme de Riemann-Lebesgue) $\int_a^b f(t)e^{\mathrm{i}2\pi nt}\,dt \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0$ pour toute fonction f intégrable sur $[a,b]$.
- $\lim_{M\to+\infty} \int_{-M}^{M} \phi(t)\,dt = 1$

On suppose que f est une fonction de support borné telle qu'on peut l'écrire $f(t) = f(0) + tg(t)$ pour g intégrable (c'est par exemple le cas si f est continûment dérivable). Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(t)f(t)\,dt = f(0)\,.$$

5. Dans tous les cas ci-dessus, on définit $\delta(t) = \lim_{n\to+\infty} \phi_n(t)$ qu'on appellera distribution (ou impulsion) de Dirac. C'est là une définition simplifiée et on notera que $\delta(t)$ n'est pas une fonction. La théorie des distributions montre toutefois que $\delta(t)$ peut se manipuler comme une fonction. On résume ci-dessous des éléments essentiels (aucune preuve n'est réellement demandée) :

(a) On peut définir la translatée $\delta(t-\tau) = \lim_{n\to+\infty} \phi_n(t-\tau)$. Alors $\int_{\mathbb{R}} \delta(u-\tau)f(u)\,dt = f(\tau)$ sous les mêmes hypothèses que ci-dessus (vérifier qu'on obtient également cette relation par changement de variable). On admettra cette propriété pour toute fonction continue.

(b) La distribution de Dirac est symétrique $\delta(t) = \delta(-t)$ (vérifier).

(c) Finalement, pour toute fonction continue, on la propriété essentielle (noter la convolution) :

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)\delta(t-u)\,du = f(t) = \int_{\mathbb{R}} \delta(u)f(t-u)\,du$$

Réponses exercice: 1

1. (a) $\lim_{n\to+\infty}\phi_n(t)=0$ si $t\neq 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\phi_n(0)=\infty$.

   (b)
$$\int_{\mathbb{R}}\phi_n(t)f(t)\ dt=\int_{\mathbb{R}} ne^{-\pi n^2t^2}f(t)\ dt=\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi u^2}f(u/n)\ du$$
   Sous cette dernière forme, les $u\mapsto e^{-\pi u^2}f(u/n)$ convergent simplement vers la fonction $u\mapsto e^{-\pi u^2}f(0)$ et sont dominés par la fonction intégrable $u\mapsto e^{-\pi u^2}(\sup|f|)$. L'application du théorème de convergence dominée donne alors
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\phi_n(t)f(t)\ dt=\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi u^2}f(0)\ du=f(0)$$

2. La continuité de f en zéro entraîne qu'elle est bornée dans un voisinage de zéro et donc, pour un $N\in\mathbb{N}$ choisi assez grand, f bornée sur $[-1/2N,1/2N]$. Dès lors, on peut procéder comme précédemment :
$$\int_{\mathbb{R}}\phi_n(t)f(t)\ dt=\int_{\mathbb{R}} n\mathbb{1}_{[-1/2n,1/2n]}(t)f(t)\ dt=\int_{-1/2}^{1/2}f(u/n)\ du$$
   La suite de fonctions $u\mapsto f(u/n)$ définies sur $[-1/2,1/2]$ converge simplement vers la fonction constante $f(0)$, ces fonctions sont dominées (à partir de $n\geq N$) par une fonction constante (donc intégrable). On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée.
   Une autre possibilité est de constater que les fonctions $u\mapsto f(u/n)$ définies sur $[-1/2,1/2]$ convergent uniformément vers la fonction constante $f(0)$, ce qui donne le même résultat par permutation de limite et intégrale.

3. Même technique.

4. Ici, ϕ n'est pas intégrable et la technique précédente ne fonctionne pas. En revanche, en supposant le support de f inclus dans $[-M,M]$:
$$\int_{\mathbb{R}}\phi_n(t)f(t)\ dt=\int_{-M}^{M}\phi_n(t)f(t)\ dt=\int_{-M}^{M}\frac{\sin\pi nt}{\pi t}f(0)\ dt+\int_{-M}^{M}\frac{\sin\pi nt}{\pi}g(t)\ dt$$
   Pour $n\to+\infty$, le deuxième terme tend vers zéro tandis que le premier tend vers $f(0)$, ce qui donne le résultat souhaité.

5. Rien à démontrer, voir cours de mathématiques pour des preuves sérieuses.

Exercice 2: inégalité de Heisenberg Dans tout l'exercice, on considère un signal déterministe $x(t)$ d'énergie finie ($t\in\mathbb{R}$ représente le temps). On supposera que ce signal est dérivable, que $x'(t)$ est d'énergie finie et que $tx(t)$ est d'énergie finie.

1. (a) Préciser comment s'énonceraient les hypothèses ci-dessus dans le langage du cours de mathématiques. En admettant qu'elles existent, préciser les limites de $t|x(t)|^2$ pour $t\to+\infty$ et $t\to-\infty$.

   (b) On note E_x l'énergie du signal $x(t)$. Rappeler la définition de E_x.

2. On définit :
$$t_0\triangleq\int_{\mathbb{R}} t\frac{|x(t)|^2}{E_x}\ dt\qquad \text{et : } T\triangleq\sqrt{\int_{\mathbb{R}}(t-t_0)^2\frac{|x(t)|^2}{E_x}\ dt}$$
   En faisant une analogie avec les probabilités, justifier que l'on puisse dire que t_0 est le «temps moyen du signal». Interpréter T (appelé parfois «durée quadratique moyenne»).
   Dans la suite de l'énoncé, on supposera $t_0=0$.

3. On note $X(f)$ la transformée de Fourier de $x(t)$ (f désigne la fréquence) et on fait l'hypothèse que $\int_{\mathbb{R}} f|X(f)|^2\ df=0$.
   En utilisant la relation de Parseval, donner l'expression de E_x en fonction de $X(f)$. Interpréter la quantité B introduite ci-dessous (et appelée parfois de «bande quadratique moyenne occupée») :
$$B\triangleq\sqrt{\int_{\mathbb{R}} f^2\frac{|X(f)|^2}{E_x}\ df}$$

4. Rappeler comment s'écrit la transformée de Fourier de $x'(t)$ en fonction de $X(f)$ et en déduire :

$$\int_{\mathbb{R}} |x'(t)|^2 \, dt = 4\pi^2 B^2 E_x$$

5. En appliquant l'inégalité de Schwarz à $\int_{\mathbb{R}} (tx(t))^* x'(t) \, dt$ d'une part, et en calculant cette intégrale d'autre part, montrer que $BT \geq \frac{1}{4\pi}$.

6. Déterminer les signaux *à valeurs réelles* d'énergie finie pour lesquels le produit BT est minimum.

7. On rappelle la transformée de Fourier $e^{-\pi t^2} \xrightarrow{\text{TF}} e^{-\pi f^2}$ et on considère le signal particulier $x(t) = e^{-\pi t^2}$. Calculer E_x, B et T.

Réponses exercice: 2

1. (a) $x(t)$ dérivable et $x(t)$, $x'(t)$, $tx(t)$ appartiennent à $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. En admettant que les limites existent, on constate alors que $\lim_{t\to+\infty} t|x(t)|^2 = \lim_{t\to-\infty} t|x(t)|^2 = 0$.
Remarque : L'existence des limites en question peut se prouver comme suit : soit $g(t) = t|x(t)|^2$. Alors $g'(t) = |x(t)|^2 + tx'(t)x(t)^* + tx(t)x'(t)^*$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ puisque chacun des termes s'écrit comme un produit de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$. De plus $|g(v) - g(u)| = |\int_u^v g'(t) \, dt| \leq \int_u^v |g'(t)| \, dt$. g' étant dans $L^1(\mathbb{R})$, ce dernier terme tend vers zéro lorsque u, v tendent vers $+\infty$ et donc g admet une limite en $+\infty$ par le critère de Cauchy.

(b) cf. cours.

2. Remarquer que $\frac{|x(t)|^2}{E_x}$ est une densité de probabilité.

3. cf. cours.

4. $x'(t) \xrightarrow{\text{TF}} \mathrm{i}2\pi f X(f)$ et donc par la relation de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}} |x'(t)|^2 \, dt = \int_{\mathbb{R}} |\mathrm{i}2\pi f X(f)|^2 \, df = 4\pi^2 B^2 E_x$$

5.

$$\left| \int_{\mathbb{R}} (tx(t))^* x'(t) \, dt \right|^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} t^2 |x(t)|^2 \, dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |x'(t)|^2 \, dt \right) = 4\pi^2 B^2 T^2 (E_x)^2 \tag{1}$$

En intégrant par parties :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} (tx(t))^* x'(t) \, dt &= \Big[t|x(t)|^2 \Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} (x(t) + tx'(t))^* x(t) \, dt \\
&= -\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 \, dt - \int_{\mathbb{R}} (tx'(t))^* x(t) \, dt \\
&= -E_x - \left(\int_{\mathbb{R}} (tx(t))^* x'(t) \, dt \right)^*
\end{aligned}$$

d'où d'après cette dernière égalité :

$$\left| \int_{\mathbb{R}} (tx(t))^* x'(t) \, dt \right| \geq \left| \Re \left\{ \int_{\mathbb{R}} (tx(t))^* x'(t) \, dt \right\} \right| \geq E_x/2 \tag{2}$$

En réunissant les deux inégalités ci-dessus, il vient $(E_x)^2/4 \leq 4\pi^2 B^2 T^2 (E_x)^2$ soit encore $BT \geq \frac{1}{4\pi}$.

6. BT est minimum lorsque l'on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce qui indique qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x'(t) = -2\alpha t x(t)$. La résolution de cette équation différentielle donne $x(t) = Ce^{-\alpha t^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ puisque $x(t)$ est d'énergie finie.

7. En notant $y(t) = e^{-2\pi t^2}$, dont la transformée de Fourier est $Y(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\pi f^2/2}$, on a :

$$E_x = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi t^2} \, dt = Y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$T^2 = \int_{\mathbb{R}} t^2 \frac{e^{-2\pi t^2}}{E_x} \, dt = \left[\frac{te^{-2\pi t^2}}{-4\pi E_x} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi t^2}}{4\pi E_x} \, dt = \frac{1}{4\pi}$$

et donc

$$T = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

Le calcul de $B = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ se fait de même. Noter que pour le calcul de B et T, on aurait pu remarquer que $B = T$ et que le produit BT atteint sa borne inférieure.

Exercice 3: effet d'une troncature Soit le signal

$$x(t) = \begin{cases} A\cos(2\pi f_0 t) & \text{si } |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Tracer le signal $x(t)$ (pour $T > 1/f_0$). Est-ce un signal d'énergie finie ? de puissance finie ?

2. Calculer la transformée de Fourier de ce signal et tracer son spectre en amplitude.

3. Calculer l'énergie ou la puissance du signal pour la valeur particulière $T = T_0 = 1/f_0$.

Réponses exercice: 3

1. Energie finie, puissance nulle.

2. $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)\mathbb{1}_{[-T/2,T/2]}(t)$, et la transformée de Fourier se calcule donc immédiatement $X(f) = \frac{AT}{2}[\text{sinc}(\pi(f+f_0)T) + \text{sinc}(\pi(f-f_0)T)]$.

3. Energie $= \frac{A^2 T_0}{2}$.

Exercice 4: calcul de transformées de Fourier Cet exercice a pour but de manipuler quelques transformées de Fourier. Le cadre est implicitement celui des distributions tempérées et aucune justification théorique n'est demandée. On note dans cet exercice T et L deux réels positifs tels que $L > T > 0$.

Soit le signal

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et le signal $y(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(t - kL)$.

1. Tracer l'allure des signaux $x(t)$ et $y(t)$.
2. Que vaut la transformée de Fourier $X(f)$ du signal $x(t)$?
3. On définit $Ш_L(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-kL)$. Quel est le nom couramment donné à cette distribution ?
4. Exprimer $y(t)$ en fonction de $x(t)$ et $Ш_L(t)$. Préciser en français le nom de l'opération mise en jeu dans la formule donnée.
5. Déduire de la question précédente la transformée de Fourier $Y(f)$ de $y(t)$.
6. Tracer l'allure des transformées de Fourier $X(f)$ et $Y(f)$.
7. Voyez vous une analogie avec un calcul que vous auriez pu déjà faire en physique ?
8. Calculer la série de Fourier associée au signal L-périodique $y(t)$.
9. Montrer que les coefficients de Fourier précédents ont déjà été obtenus lors du calcul de $Y(f)$ à la question 5.

Réponses exercice: 4

1. Facile.
2. $X(f) = T\text{sinc}(\pi f T)$
3. $Ш_L(t)$ est appelé peigne de Dirac.
4. $y(t) = Ш_L(t) \star x(t)$ où $\star$ désigne la convolution.
5. Il vient $Y(f) = \frac{1}{L} Ш_{\frac{1}{L}}(f) X(f) = \frac{1}{L} Ш_{\frac{1}{L}}(f) T\text{sinc}(\pi f T)$.
6. A faire...
7. $X(f)$ correspond à la figure de diffraction d'une fente tandis que $Y(f)$ correspond à la figure de diffraction d'un réseau (avec infinité de fentes).
8. La série de Fourier associée à $y(t)$ s'écrit $y(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} y(t) e^{+i2\pi kt/L}$ avec :

$$c_k = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} y(t) e^{-i2\pi kt/L}\, dt = \frac{1}{L}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-i2\pi kt/L}\, dt = \frac{1}{\pi k}\sin(\pi k \frac{T}{L}) = \frac{T}{L}\text{sinc}\frac{\pi k T}{L}$$

9. D'après l'expression de la question 5, en remplaçant $Ш_{\frac{1}{L}}$:

$$Y(f) = \frac{T}{L}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta(f-\frac{k}{L})\mathrm{sinc}(\pi fT) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{T}{L}\mathrm{sinc}\frac{\pi kT}{L}\delta(f-\frac{k}{L}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k\delta(f-\frac{k}{L})$$

Exercice 5: signal modulé à bande étroite, transformée de Fourier Dans cet exercice, le cadre est implicitement celui des distributions tempérées et aucune justification théorique n'est demandée.

1. Soit le signal $p(t) = \cos(2\pi f_0 t)$. Quelle est la transformée de Fourier $P(f)$ de $p(t)$?

2. Soit $m(t)$ un signal à *valeurs réelles* dont la bande de fréquence occupée est $[-B, B]$ avec $B \ll f_0$. On définit $x(t) = m(t)p(t)$. Calculer la transformée de Fourier $X(f)$ de $x(t)$ en fonction de $M(f)$, transformée de Fourier de $m(t)$.

3. Représenter schématiquement l'allure de $X(f)$ en fonction de celle de $M(f)$ (transformée de Fourier de $m(t)$) et préciser la bande occupée par $x(t)$.

4. Comment s'appelle l'opération qui consiste à transformer $m(t)$ en $x(t)$? Comment appelle-t-on un signal comme $x(t)$ dont le spectre occupe une bande B avec $B \ll f_0$?

5. Soit le filtre de réponse en fréquence

$$H_a(f) = \begin{cases} 2 & \text{si } f \geq 0, \\ 0 & \text{si } f < 0. \end{cases}$$

On note $z_m(t)$ le signal obtenu lors du filtrage de $m(t)$ par $H_a(f)$. Comment s'appelle le signal $z_m(t)$? Tracer sommairement son spectre.

6. Donner la réponse impulsionnelle $h_a(t)$ du filtre de réponse en fréquence $H_a(f)$ (calcul non demandé). En déduire que l'on peut écrire $z_m(t) = m(t) + \mathrm{i}\widehat{m}(t)$ où $m(t)$ et $\widehat{m}(t)$ sont les parties réelles et imaginaires de $z_m(t)$. Comment s'appelle le signal $\widehat{m}(t)$?

7. Soit $y(t) = \Re\{z_m(t)e^{\mathrm{i}2\pi f_0 t}\}$. Tracer l'allure du spectre de $y(t)$ et déduire de ce qui précède une expression de $y(t)$ en fonction de $m(t)$ et $\widehat{m}(t)$.

Réponses exercice: 5

1. $P(f) = \frac{1}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$.

2. $X(f) = M(f) \star P(f) = \frac{1}{2}(M(f - f_0) + M(f + f_0))$.

3. Facile, voir cours.

4. La transformation de $m(t)$ en $x(t)$ s'appelle modulation. Un signal tel que $x(t)$ est dit à bande étroite.

5. Le signal $z_m(t)$ est le signal analytique associé au signal réel $m(t)$.

6. $h_a(t) = \delta(t) + \mathrm{i}\frac{1}{\pi t}$ d'où $z_m(t) = h_a(t) \star m(t) = m(t) +) + \mathrm{i}\widehat{m}(t)$, où $\widehat{m}(t) = \frac{1}{\pi t} \star m(t)$ est la transformée de Hilbert de $m(t)$.

7.

$$\begin{aligned} y(t) &= \Re\{z_m(t)e^{\mathrm{i}2\pi f_0 t}\} \\ &= \Re\{(m(t) + +\mathrm{i}\widehat{m}(t))(\cos(2\pi f_0 t) + \mathrm{i}\sin(2\pi f_0 t))\} \\ &= m(t)\cos(2\pi f_0 t) - \widehat{m}(t)\sin(2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

Voir le cours pour l'allure du spectre.

Exercice 6: fonction d'autocorrélation / densité spectrale (énergie) Soit le signal suivant (A et α sont des constantes positives strictement) :

$$x(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que $x(t)$ est un signal d'énergie finie et calculer l'énergie E_x.

2. Calculer la fonction d'autocorrélation (en énergie) $\gamma_x(\tau)$ et retrouver la valeur de E_x à partir de $\gamma_x(\tau)$.

3. Calculer la densité spectrale d'énergie $\Gamma_x(f)$ du signal et retrouver la valeur de E_x à partir de $\Gamma_x(f)$.

4. Calculer l'énergie du signal contenue dans la bande de fréquences $[-\frac{\alpha}{2\pi}, \frac{\alpha}{2\pi}]$.

Réponses exercice: 6

1. $E_x = \frac{A^2}{2\alpha}$

2. $\gamma_x(\tau) = \frac{A^2}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|}$

3. $\Gamma_x(f) = \dfrac{A^2}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$

4. L'énergie dans la bande $[-\frac{\alpha}{2\pi}, \frac{\alpha}{2\pi}]$ est $E_x/2$.

Exercice 7: filtrage, égalisation Un signal $x(t)$ est transmis à travers un canal et le signal reçu est $y(t) = Ax(t - t_0) + \alpha x(t - t_1)$, où $\alpha \ll A$ et $t_0 < t_1$.

1. Déterminer la fonction de transfert $H_c(f)$ de ce canal.

2. On désire compenser l'effet du canal par un filtrage de $y(t)$ (traitement d'égalisation). Quelle est la réponse en fréquence $H_e(f)$ du filtre (appelé filtre égaliseur) que l'on doit appliquer à $y(t)$ afin de retrouver $Ax(t - t_0)$ en sortie de l'égaliseur ?

3. En utilisant le fait que $\alpha \ll A$ et en effectuant un développement limité à l'ordre deux (par rapport à α/A) de $H_e(f)$, montrer que ce filtre égaliseur peut être approximé par le système suivant (figure 1) qui comporte des lignes à retard et des amplificateurs à gain constant. Préciser les valeurs de A_0, A_1, A_2 et τ.

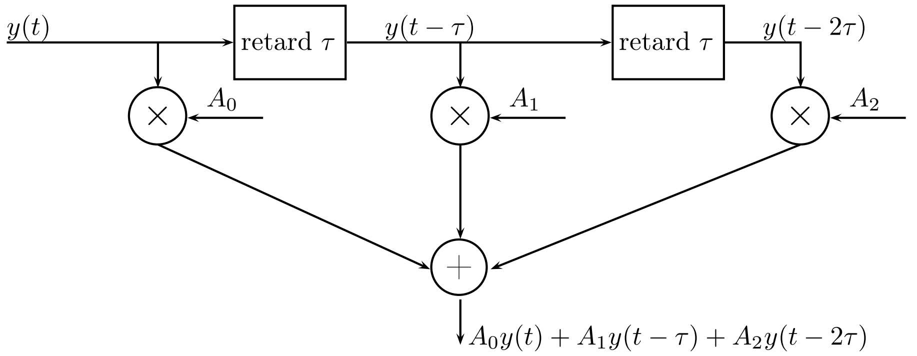


FIGURE 1 – Approximation du filtre égaliseur à l'aide de cellules de gain et de retard

Réponses exercice: 7

1. $H_c(f) = Ae^{-i2\pi f t_0} + \alpha e^{-i2\pi f t_1}$.

2. $H_e(f) = \frac{Ae^{-i2\pi f t_0}}{H_c(f)}$.

3. $H_e(f) \approx 1 - \frac{\alpha}{A} e^{-i2\pi f(t_1 - t_0)} + \frac{\alpha^2}{A^2} e^{-i4\pi f(t_1 - t_0)}$ d'où $A_0 = 1, A_1 = -\frac{\alpha}{A}, A_2 = \frac{\alpha^2}{A^2}$ et $\tau = t_1 - t_0$.

Exercice 8: filtrage Soit $\beta > 0$ une constante et le filtre défini par sa réponse impulsionnelle

$$h(t) = \delta(t) - \beta e^{-\beta t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) = \begin{cases} \delta(t) - \beta e^{-\beta t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

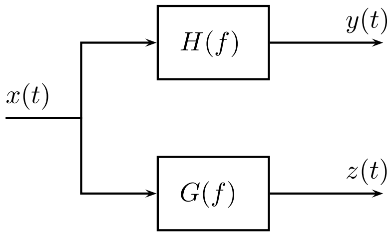
1. Le filtre est-il causal ? Justifier.

2. Le filtre est-il stable ? Justifier.

3. Exprimer la réponse en fréquence $H(f)$ de ce filtre. Est-ce un passe-haut, passe-bas, passe-bande ou coupe-bande ?

4. On définit un filtre complémentaire par sa réponse en fréquence $G(f) = 1 - H(f)$. Donner la réponse impulsionnelle $g(t)$ correspondante.

5. Soit $x(t)$ un signal de densité spectrale de puissance $\Gamma_x(f)$ et qui attaque en entrée les filtres $H(f)$ et $G(f)$. On note $y(t)$ et $z(t)$ les sorties correspondantes.



Calculer la densité spectrale de $y(t) + z(t)$ en fonction de $\Gamma_x(f)$.

6. Calculer la densité spectrale de $y(t) - z(t)$ en fonction de $\Gamma_x(f)$.

Réponses exercice: 8

1. Le filtre est causal puisque pour $t < 0$, on a $h(t) = 0$.

2. Oui, le filtre est stable au sens entrée bornée-sortie bornée.

3.

$$H(f) = \mathrm{TF}\{h(t)\} = 1 - \frac{\beta}{\beta + \mathrm{i}2\pi f} = \frac{\mathrm{i}2\pi f}{\beta + \mathrm{i}2\pi f}$$

On constate $|H(f)| \leq 1$, $|H(f)| \xrightarrow[f\to\infty]{} 1$ et $|H(f)| \xrightarrow[f\to 0]{} 0$. Il s'agit donc d'un filtre globalement passe-haut.

4. $g(t) = \mathrm{TF}^{-1}\{G(f)\} = \delta(t) - h(t) = \beta e^{-\beta t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$.

5. $y(t) + z(t)$ provient du filtrage de $x(t)$ par le filtre de réponse en fréquence $H(f) + G(f)$. La densité spectrale est donc : $\Gamma_{y+z}(f) = |H(f) + G(f)|^2\Gamma_x(f) = \Gamma_x(f)$.

6. $y(t) - z(t)$ provient du filtrage de $x(t)$ par le filtre de réponse en fréquence $H(f) - G(f)$. La densité spectrale est donc :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{y-z}(f) &= |H(f) - G(f)|^2\Gamma_x(f) = |2H(f) - 1|^2\Gamma_x(f) \\
&= \left|2\frac{\mathrm{i}2\pi f}{\beta + \mathrm{i}2\pi f} - 1\right|^2 \Gamma_x(f) = \left|\frac{-\beta + \mathrm{i}2\pi f}{\beta + \mathrm{i}2\pi f}\right|^2 \Gamma_x(f) \\
&= \Gamma_x(f)
\end{aligned}$$

<u>Remarque :</u> Ces deux fonctions de transfert sont souvent utilisées pour des filtres d'aiguillage dans les enceintes acoustiques. $H(f)$ alimente le «tweeter» tandis que $G(f)$ alimente le «boomer». Les égalités $\Gamma_{y+z}(f) = \Gamma_{y-z}(f) = \Gamma_x(f)$ indiquent que le spectre en sortie de l'enceinte est théoriquement fidèle au spectre en sortie de l'amplificateur de puissance et ce, même si l'on se trompe sur la polarité de branchement d'une des enceintes.

Echantillonnage

Exercice 9: échantillonnage idéal/non idéal suiveur/non idéal bloqueur Dans cet exercice, les signaux sont implicitement considérés comme appartenant à l'ensemble des distributions tempérées. On note $\delta(t-a)$ la distribution de Dirac centrée en a et $Ш_T(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t-nT)$ le peigne de Dirac de période T.

Soit un signal à temps continu $x(t)$ de transformée de Fourier notée $X(f)$.

1. On définit le signal $x_e(t) = x(t)Ш_T(t)$.
   - (a) Montrer que $x_e(t)$ ne dépend que de l'ensemble des valeurs $(x(nT))_{n\in\mathbb{Z}}$ du signal $x(t)$. Quelle nom est donné à l'opération modélisée par la multiplication par le peigne de Dirac ?
   - (b) Calculer $X_e(f)$ la transformée de Fourier de $x_e(t)$ (en fonction de $X(f)$) ?
   - (c) Dans le cas où $x(t)$ est à bande limitée $[-B, B]$, tracer l'allure schématique des spectres de $x(t)$ et $x_e(t)$.

2. On considère maintenant un échantillonnage non idéal du signal $x(t)$. On introduit pour cela la fonction porte $\Pi_\theta(t) = 1$ si $0 \le t \le \theta$ et 0 sinon. On suppose de plus $\theta < T$.
   - (a) Soit le signal $x_s(t) = x(t)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Pi_\theta(t-nT)\right)$. Justifier par un dessin que ce signal puisse modéliser un échantillonneur-suiveur (non idéal).
   - (b) Exprimer $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Pi_\theta(t-nT)$ comme un produit de convolution avec le peigne de Dirac, puis calculer sa transformée de Fourier.
   - (c) En déduire la transformée de Fourier $X_s(f)$ de $x_s(t)$. Commenter et conclure.

3. On considère un autre modèle d'échantillonnage non idéal en conservant les notations de la question 2.
   - (a) Soit le signal $x_b(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT)\Pi_\theta(t-nT)$. Justifier par un dessin que ce signal puisse modéliser un échantillonneur-bloqueur (non idéal).
   - (b) Ecrire $x_b(t)$ comme une convolution avec $\Pi_\theta(t)$.
   - (c) En déduire la transformée de Fourier $X_b(f)$ de $x_b(t)$. Comparer aux résultats précédents et commenter.

Réponses exercice: 9

1. On définit le signal $x_e(t) = x(t)Ш_T(t)$.
   - (a) Voir cours.
   - (b) Voir cours.
   - (c) Voir cours.

2.
   - (a) Dessin à faire.
   - (b)

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Pi_\theta(t-nT) = \Pi_\theta(t) \star Ш_T(t) \xrightarrow{\text{TF}} \theta e^{-\mathrm{i}\pi f\theta}\mathrm{sinc}(\pi f\theta).\frac{1}{T}Ш_{\frac{1}{T}}(f) = \frac{\theta}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\mathrm{i}\pi\frac{n}{T}\theta}\mathrm{sinc}(\pi\frac{n}{T}\theta)\delta(f-\frac{n}{T})$$

   - (c)

$$X_s(f) = X(f) \star \frac{\theta}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\mathrm{i}\pi\frac{n}{T}\theta}\mathrm{sinc}(\pi\frac{n}{T}\theta)\delta(f-\frac{n}{T}) = \frac{\theta}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\mathrm{i}\pi\frac{n}{T}\theta}\mathrm{sinc}(\pi\frac{n}{T}\theta)X(f-\frac{n}{T})$$

Par rapport à la formule du spectre obtenu dans le cas d'un échantillonnage idéal, chaque motif de spectre périodisé dans l'échantillonnage idéal est ici affecté d'un facteur identique pour n fixé. Un filtrage passe-bas permet donc de reconstituer le signal initial.

3.
   - (a) Dessin à faire.
   - (b) $x_b(t) = \Pi_\theta(t) \star \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT)\delta(t-nT) = \Pi_\theta(t) \star x_e(t)$

(c) $X_b(f) = \theta e^{-\mathrm{i}\pi f\theta}\mathrm{sinc}(\pi f\theta)X_e(f) = \frac{\theta}{T}e^{-\mathrm{i}\pi f\theta}\mathrm{sinc}(\pi f\theta)\sum_{n\in\mathbb{Z}} X(f-\frac{n}{T})$. La version périodisée du spectre obtenue suite à un échantillonnage parfait est ici affectée d'un facteur en sinus cardinal, non constant pour un motif (n fixé). Une reconstruction par filtrage passe-bas sera nécessairement sujette à distorsion, d'autant plus faible que θ est petit.

Exercice 10: formule d'interpolation Dans cet exercice, on suppose $T > 0$ fixé.

1. Soit, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, s_n le signal d'énergie finie ($s_n \in L^2(\mathbb{R})$) défini par sa transformée de Fourier S_n qui s'écrit :

$$S_n(f) = \begin{cases} \sqrt{T}e^{-\mathrm{i}2\pi nTf} & \text{si } f \in [-1/2T, 1/2T] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer l'expression temporelle du signal s_n.

2. On définit dans l'espace des signaux d'énergie finie ($L^2(\mathbb{R})$) le produit scalaire :

$$\langle x, y\rangle \triangleq \int_{\mathbb{R}} x(t)y(t)^*\, dt$$

Montrer que la famille $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée dans l'espace des signaux d'énergie finie et à bande limitée $[-1/2T, 1/2T]$.

3. Soit x un signal d'énergie finie et de bande limitée $[-1/2T, 1/2T]$. On note X la transformée de Fourier de x. On définit une version périodisée de X par :

$$\begin{cases} \forall f \in]-1/2T, 1/2T] & \tilde{X}(f) = X(f) \\ \forall f \in \mathbb{R} & \tilde{X}(f+\frac{1}{T}) = \tilde{X}(f) \end{cases}$$

(a) Calculer le développement en série de Fourier de $\tilde{X}$. On rappelle que dans le cas présent, il s'exprime sous la forme :

$$\tilde{X}(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\mathrm{i}2\pi nfT} \text{ avec pour tout } n \in \mathbb{Z} : c_n = T\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \tilde{X}(f)e^{-\mathrm{i}2\pi nfT}\, df$$

(b) En déduire la relation suivante, appelée formule d'interpolation de Shannon :

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT)\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi(t-nT)}{T}\right)$$

A partir des questions 2 et 3b on obtient que la famille $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée des signaux d'énergie finie et de bande limitée $[-1/2T, 1/2T]$.

4. Commenter le fait que l'on ait obtenu une formule d'interpolation exacte. Est-ce cohérent avec le «sens physique» ?

Réponses exercice: 10

1.

$$s_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi(t-nT)}{T}\right)$$

2. Utiliser la relation de Parseval.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n = Tx(-nT)$ et donc :

$$\tilde{X}(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} Tx(nT)e^{-\mathrm{i}2\pi nfT}$$

(égalité valable au sens de la norme quadratique dans $L^2(-1/2T, 1/2T)$).

(b) En notant $\Pi_{\frac{1}{T}}$ la fonction qui vaut 1 sur $[-1/2T, 1/2T]$ et 0 ailleurs, on remarque que $X(f) = \tilde{X}(f)\Pi_{\frac{1}{T}}(f)$ et on a donc l'égalité suivante, valable au sens de la norme quadratique dans $L^2(\mathbb{R})$:

$$X(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} Tx(nT)e^{-\mathrm{i}2\pi nfT}\Pi_{\frac{1}{T}}(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{T}x(nT)S_n(f)$$

La formule d'interpolation en découle immédiatement en prenant la transformée de Fourier inverse (noter que cette égalité a ici été démontrée au sens de la norme quadratique de $L^2(\mathbb{R})$ et a utilisé la continuité de la TF dans $L^2(\mathbb{R})$).

Exercice 11: équivalence filtrage analogique/numérique On considère $h_a(t)$ et $x_a(t)$, deux signaux analogiques déterministes continus, à bande limitée $[-B, B]$ et tels que $\int |h_a(t)|\, dt < \infty$ et $\int |x_a(t)|\, dt < \infty$.

Le but de l'exercice est de démontrer une équivalence entre filtrage analogique et numérique. Ceci est représenté par les deux schémas de la figure 2, sur lequel on souhaite obtenir le lien entre $y_a(\frac{n}{2B})$ et y_n.

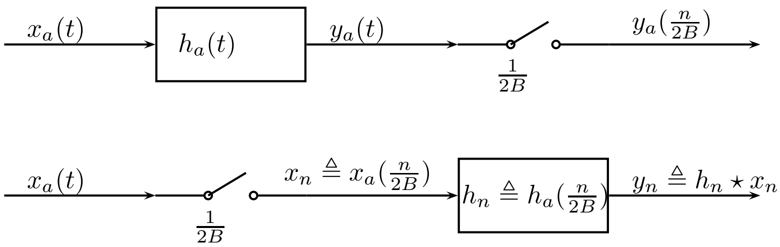


FIGURE 2 – Filtrage analogique avant échantillonnage / Filtrage numérique après échantillonnage

1. Le filtre de réponse impulsionnelle $h_a(t)$ est-il stable ?

2. Soit $y_a(t)$ le résultat du filtrage de $x_a(t)$ par le filtre de réponse impulsionnelle $h_a(t)$.

(a) Comment s'écrit $y_a(t)$ sous forme d'une intégrale ?

(b) On note $X_a(f)$, $Y_a(f)$ et $H_a(f)$ les transformées de Fourier temps continu respectives des signaux $x_a(t)$, $y_a(t)$ et $h_a(t)$ (la lettre f représente la fréquence). Quel est le lien entre $X_a(f)$, $Y_a(f)$ et $H_a(f)$?

(c) En déduire :

$$y_a(t) = \int_{-B}^{B} e^{\mathrm{i}2\pi ft} H_a(f)X_a(f)\, df$$

3. On forme par échantillonnage les signaux $x_n \triangleq x_a(\frac{n}{2B})$ et $h_n \triangleq h_a(\frac{n}{2B})$. On suppose aussi pour des raisons techniques $\sum |x_n| < \infty$ et $\sum |h_n| < \infty$. La condition d'échantillonnage de Shannon-Nyquist est-elle vérifiée ?

4. y_n est le résultat du filtrage numérique de x_n par le filtre de réponse impulsionnelle h_n.

(a) Comment s'écrit y_n sous forme d'une somme ?

(b) On note $X(\tilde{f})$, $Y(\tilde{f})$ et $H(\tilde{f})$ les transformées de Fourier temps discret respectives des signaux x_n, y_n et h_n ($\tilde{f}$ représente la fréquence normalisée). Quel est le lien entre $X(\tilde{f})$, $Y(\tilde{f})$ et $H(\tilde{f})$?

(c) En déduire que :

$$y_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{\mathrm{i}2\pi n\tilde{f}} H(\tilde{f})X(\tilde{f})\, d\tilde{f}$$

5. On admet pour les signaux $x_a(t)$ et $h_a(t)$ que la formule sommatoire de Poisson est vérifiée :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} X_a(f-2Bk) = \frac{1}{2B}\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_a\left(\frac{k}{2B}\right)e^{-\mathrm{i}2\pi k\frac{f}{2B}} \quad \text{et :} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} H_a(f-2Bk) = \frac{1}{2B}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_a\left(\frac{k}{2B}\right)e^{-\mathrm{i}2\pi k\frac{f}{2B}}$$

(a) Rappeler la définition de $X(\tilde{f})$ et en déduire que l'on a pour $\tilde{f} \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$: $X(\tilde{f}) = 2BX_a(2B\tilde{f})$. Quelle relation a-t-on entre $H(\tilde{f})$ et $H_a(f)$?

(b) En déduire $y_n = 2By_a(\frac{n}{2B})$ et la relation :

$$y_a\left(\frac{n}{2B}\right) = \frac{1}{2B}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_a\left(\frac{k}{2B}\right) x_a\left(\frac{n-k}{2B}\right)$$

Réponses exercice: 11

1. Oui.

2. (a) $y_a(t) = \int_{\mathbb{R}} h_a(\theta)x_a(t-\theta)\,d\theta$.

(b) $Y_a(f) = H_a(f)X_a(f)$.

(c)

$$y_a(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}2\pi ft}Y_a(f)\,df = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}2\pi ft}H_a(f)X_a(f)\,df = \int_{-B}^{B} e^{\mathrm{i}2\pi ft}H_a(f)X_a(f)\,df$$

L'égalité est vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$ compte tenu des hypothèses (continuité et stabilité des signaux).

3. Oui, la condition d'échantillonnage de Shannon-Nyquist est vérifiée.

4. (a) $y_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k x_{n-k}$

(b) $Y(\tilde{f}) = H(\tilde{f})X(\tilde{f})$

(c) Formule de transformée de Fourier inverse

5. (a)

$$X(\tilde{f}) \triangleq \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k e^{-\mathrm{i}2\pi k\tilde{f}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_a\left(\frac{k}{2B}\right)e^{-\mathrm{i}2\pi k\tilde{f}} = 2B\sum_{k\in\mathbb{Z}} X_a(2B\tilde{f} - 2Bk)$$

Pour $\tilde{f} \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, la dernière expression vaut $2BX_a(2B\tilde{f})$ compte tenu du support de $X_a(f)$. Idem $H(\tilde{f}) = 2BH_a(2B\tilde{f})$.

(b)

$$y_n = (2B)^2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{\mathrm{i}2\pi n\tilde{f}}H_a(2B\tilde{f})X_a(2B\tilde{f})\,d\tilde{f} = 2B\int_{-B}^{B} e^{\mathrm{i}2\pi\frac{n}{2B}f}H_a(f)X_a(f)\,df = 2By_a\left(\frac{n}{2B}\right)$$

Exercice 12: échantillonnage de l'enveloppe complexe

1. On considère un signal analogique $x(t)$ à bande limitée qui occupe une bande $[-B, B]$.

(a) Quelle est la fréquence minimale à laquelle il est possible d'échantillonner $x(t)$ sans perte d'information ?

(b) On construit le signal $y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$ où f_0 est une fréquence fixée et grande par rapport à B.

Calculer la transformée de Fourier $Y(f)$ de $y(t)$ en fonction de $X(f)$, tranformée de Fourier de $x(t)$ (on suppose qu'il n'y a pas de problème d'existence). Représenter schématiquement $Y(f)$ et $X(f)$.

(c) Quelle est la bande $[-C, C]$ occupée par $y(t)$? Si on applique directement le théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist, quelle est la fréquence minimale d'échantillonnage de $y(t)$?

Ce résultat vous inspire-t-il un commentaire en comparaison du résultat de la question 1a ?

Nous allons maintenant montrer comment il est possible d'échantillonner un signal bande étroite à une fréquence inférieure à la fréquence de Shannon-Nyquist.

2. On considère un signal $s(t)$ à *valeurs réelles* et à bande étroite. On note f_0 la fréquence centrale de $s(t)$; $[f_0 - B, f_0 + B]$ désigne la bande des fréquences positives occupés par $s(t)$ (f_0 grand par rapport à B).

(a) Tracer schématiquement le spectre de $s(t)$ en faisant apparaître les fréquences positives et négatives.

(b) Rappeler la définition de $z_s(t)$, signal analytique associé à $s(t)$. Tracer schématiquement son spectre.

(c) Rappeler la définition de $\xi_s(t)$, enveloppe complexe associée à $s(t)$. Tracer schématiquement son spectre.

3. (a) Quelle est la bande occupée par $\xi_s(t)$? En déduire la fréquence minimale à laquelle on peut échantillonner $\xi_s(t)$ sans perdre d'information.

(b) Expliquer brièvement comment à partir d'échantillons de $\xi_s(t)$ prélevés à la fréquence $2B$, on peut reconstituer $s(t)$. Conclure.

Réponses exercice: 12

1. (a) Fréquence minimale d'échantillonnage de $x(t)$: $f_e^{(x)} = 2B$.

(b) $Y(f) = \frac{1}{2}(X(f - f_0) + X(f + f_0))$.

(c) $C = f_0 + B$. Fréquence minimale d'échantillonnage de $y(t)$: $f_e^{(y)} = 2C = 2(f_0 + B)$. Il est surprenant que $f_e^{(y)} >> f_e^{(x)}$ alors que les deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ contiennent la même information.

2. (a)

(b) Voir cours.

(c) Voir cours.

3. (a) Bande occupée par $\xi_s(t)$: $[-B, B]$. Fréquence minimale d'échantillonnage de $\xi_s(t)$: $f_e^{(\xi)} = 2B$.

(b) A partir d'échantillons $\xi_s(k/2B), k \in \mathbb{Z}$ on peut théoriquement reconstruire $\xi_s(t), t \in \mathbb{R}$ (d'après th. d'échantillonnage) et alors $s(t) = \Re[\xi_s(t)e^{i2\pi f_0 t}]$. Il est donc possible de reconstruire un signal réel et bande étroite (largeur de bande $2B$) à partir des échantillons de son enveloppe complexe prélevés à une fréquence $2B$ très inférieure à la fréquence de Shannon-Nyquist.

Exercice 13: décimation, interpolation Soit $s(t)$ un signal à bande limitée $[-B, B]$ dont l'allure du spectre est représentée schématiquement sur la figure 3.

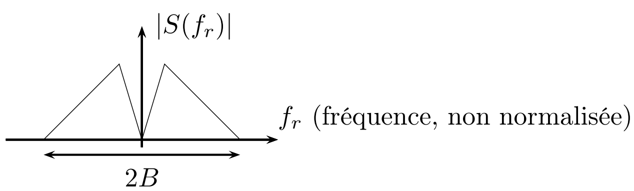


FIGURE 3 – Spectre schématique du signal $s(t)$

1. On définit les signaux à temps discret :

$$\forall n : \qquad x_n = s\left(\frac{n}{2B}\right) \qquad z_n = s\left(\frac{n}{4B}\right)$$

Comment s'appelle l'opération qui consiste à recueillir les signaux ci-dessus à partir de $s(t)$? La condition du théorème de Shannon-Nyquist est-t-elle vérifiée pour x_n ? pour z_n ?

2. Tracer l'allure schématique des spectres des signaux à temps discret x_n et z_n (on tracera l'allure des transformées de Fourier à temps discret respectives $X(f)$ et $Z(f)$ sur l'intervalle de fréquences normalisées $[0, 1]$).

3. On définit le signal à temps discret y_n par :

$$\begin{cases} \text{Si } n \text{ est pair } (n = 2p), & y_{2p} = x_p \\ \text{Si } n \text{ est impair } (n = 2p + 1), & y_{2p+1} = 0 \end{cases}$$

Calculer la transformée en z de y_n (notée $Y[z]$) en fonction de celle de x_n (notée $X[z]$).

4. Quel est le lien entre $Y[z]$ et la transformée de Fourier à temps discret de y_n (notée $Y(f)$) ? En déduire un lien entre $Y(f)$ et $X(f)$. Représenter alors l'allure de $Y(f)$ sur l'intervalle de fréquences normalisées $[0,1]$.

5. Montrer que par un filtrage passe-bas numérique de y_n, il est possible de retrouver z_n.

6. On souhaite obtenir la formule correspondant à l'interpolation précédemment décrite en fréquence.

(a) Considérer $Z(f)$ sur l'intervalle $[-1/4,1/4]$, décomposer cette fonction en série de Fourier sur cet intervalle et montrer que cette décomposition s'écrit :

$$Z(f) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} 2z_{2p}e^{-\mathrm{i}4\pi pf} \qquad \text{(sur l'intervalle } [-1/4,1/4])$$

Rappel : Pour une fonction g périodique de période a, on rappelle qu'une écriture de la décomposition en série de Fourier est donnée par $g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-\mathrm{i}2\pi kx/a}$ avec $c_k = \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2} g(x)e^{+\mathrm{i}2\pi kx/a}\,dx$.

(b) Exprimer z_n en fonction de $Z(f)$ puis en déduire la relation suivante qui exprime z_n en fonction des échantillons pairs :

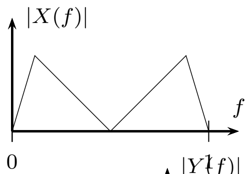
$$z_n = \sum_{p\in\mathbb{Z}} z_{2p}\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi(n-2p)}{2}\right)$$

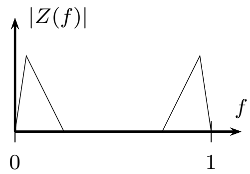
(c) En déduire z_n en fonction des x_n.

Réponses exercice: 13

1. Il s'agit d'un échantillonnage. Les conditions du théorème de Shannon-Nyquist sont vérifiées pour x_n et pour z_n. Pour x_n, la fréquence d'échantillonnage est la valeur minimale limite fournie par le théorème d'échantillonnage.

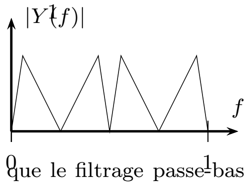
2.





3. $Y[z] = X[z^2]$.

4. $Y(f) = X(2f)$.



5. On constate (graphiquement) que le filtrage passe-bas numérique du motif qui représente $Y(f)$ donne le motif qui représente $Z(f)$.

6. (a) Sur l'intervalle $[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$, $Z(f)$ peut se décomposer :

$$Z(f) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} c_p e^{-\mathrm{i}4\pi pf} \tag{3}$$

où, compte tenu du support de $Z(f)$:

$$c_p = 2\int_{-1/4}^{1/4} Z(f)e^{+\mathrm{i}4\pi pf}\,df = 2\int_{-1/2}^{1/2} Z(f)e^{+\mathrm{i}4\pi pf}\,df = 2z_{2p} \tag{4}$$

D'où le résultat.

(b) En tenant à nouveau compte du support de $Z(f)$:

$$z_n = \int_{-1/2}^{1/2} Z(f)e^{+\mathrm{i}2\pi nf}\,df = \int_{-1/4}^{1/4} Z(f)e^{+\mathrm{i}2\pi nf}\,df \tag{5}$$

En remplaçant $Z(f)$ par l'expression trouvée sur cet intervalle :

$$z_n = \int_{-1/4}^{1/4}\left(\sum_{p\in\mathbb{Z}} 2z_{2p}e^{-\mathrm{i}4\pi pf}\right)e^{+\mathrm{i}2\pi nf}\,df = \sum_{p\in\mathbb{Z}} 2z_{2p}\int_{-1/4}^{1/4} e^{-\mathrm{i}4\pi pf}e^{+\mathrm{i}2\pi nf}\,df \tag{6}$$

En poursuivant le calcul, il vient le résultat demandé :

$$z_n = \sum_{p\in\mathbb{Z}} z_{2p}\text{sinc}\left(\frac{\pi(n-2p)}{2}\right)$$

(c) On a $z_{2p} = x_p$ pour tout entier p et donc d'après la question précédente :

$$z_n = \sum_{p\in\mathbb{Z}} x_p\text{sinc}\left(\frac{\pi(n-2p)}{2}\right)$$

Remarque : L'élève soucieux de rigueur pourra supposer que z_n est sommable et donc dans ℓ^2. Dès lors, (3) est vraie dans $\mathrm{L}^2(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ (et non pas pour tout f). (5) exprime alors que compte tenu du support de $Z(f)$ dans $\mathrm{L}^2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, on a l'égalité des deux produits scalaires :

$$\langle e^{-\mathrm{i}2\pi nf}, Z(f)\rangle_{\mathrm{L}^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})} = \langle e^{-\mathrm{i}2\pi nf}, Z(f)\rangle_{\mathrm{L}^2(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})}$$

Ceci justifie la permutation de la somme et de l'intégrale dans (6).

Signaux déterministes à temps discret

Exercice 14: transformée en z

1. Transformée en z (et domaine de définition) de :

$$x_n = \begin{cases} \frac{\beta^n}{n!} & \text{si } n \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

oú $\beta \in \mathbb{C}$.

2. Transformée en z (et domaine de définition) de :

$$y_n = \begin{cases} n\alpha^n & \text{si } n \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

3. Les signaux x_n et y_n sont délivrés chacun à une période T par deux sources avec un retard $T/2$ entre les deux. On construit le signal multiplexé s_n en prenant : $s_0 = x_0, s_1 = y_0, s_2 = x_1, s_3 = y_1, \ldots$. Transformée en z de s_n ?

Réponses exercice: 14

1. $X[z] = e^{\beta/z}$ sur le domaine de définition $\mathbb{C}^*$.

2. $Y[z] = \frac{\alpha}{z}\frac{1}{(1-\alpha/z)^2}$ sur le domaine de définition $|z| > |\alpha|$.
On peut en effet utiliser la règle de d'Alembert du calcul du rayon de convergence (en définissant $u_n = n(\frac{\alpha}{z})^n$, on a $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha}{z}$ et donc $\sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n\geq 0} n(\frac{\alpha}{z})^n$ converge pour $|\alpha/z| \leq 1$). On se rappelle d'autre part que :

$$\forall |x| < 1, \qquad \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ et en dérivant : } \sum_{n\geq 1} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

On trouve $Y[z] = \sum_{n\geq 0} n(\alpha/z)^n = \frac{\alpha}{z}\sum_{n\geq 1} n(\frac{\alpha}{z})^{n-1} = \frac{\alpha}{z}\frac{1}{(1-\alpha/z)^2}$.

3. $S[z] = X[z^2] + z^{-1}Y[z^2]$ sur le domaine où z^2 appartient au domaine de $X[z]$ et $Y[z]$.

Exercice 15: inversion de la transformée en z Calculer les signaux à temps discret dont la transformée en z a pour expression :

$$X[z] = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$$

Réponses exercice: 15 $X[z]$ admet trois domaines de convergence possible qui sont $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z| < 1\}$, $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 1 < |z| < 2\}$ et $D_3 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 2 < |z|\}$.

On notera la décomposition en éléments simples $X[z] = \frac{1}{z-1} + \frac{-1}{z-2} + \frac{2}{(z-2)^2}$ et les développements en série :

$$\forall |z| < |a|, \qquad \frac{1}{z-a} = \frac{-a^{-1}}{1-a^{-1}z} = -a^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} a^{-k}z^k = -a^{-1}\sum_{n=-\infty}^{0} a^n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} -a^{n-1}z^{-n}$$

$$\forall |z| > |a|, \qquad \frac{1}{z-a} = \frac{z^{-1}}{1-az^{-1}} = z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}z^{-n}$$

Et par dérivation, puisque $\frac{1}{(z-a)^2} = \frac{d}{dz}\left[\frac{-1}{z-a}\right]$, il vient :

$$\forall |z| < |a|, \qquad \frac{1}{(z-a)^2} = \frac{d}{dz}\left[\sum_{n=-\infty}^{0} a^{n-1}z^{-n}\right] = \sum_{n=-\infty}^{0} -na^{n-1}z^{-(n+1)} = \sum_{p=-\infty}^{1} -(p-1)a^{p-2}z^{-p}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{0} -(n-1)a^{n-2}z^{-n}$$
$$\forall |z| > |a|, \qquad \frac{1}{(z-a)^2} = \frac{d}{dz}\left[-\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}z^{-n}\right] = -\sum_{n=1}^{\infty} -na^{n-1}z^{-(n+1)} = -\sum_{p=2}^{\infty} -(p-1)a^{p-2}z^{-p}$$
$$= -\sum_{n=1}^{\infty} -(n-1)a^{n-2}z^{-n}$$

D'où l'on tire :

$$\frac{1}{z-1} = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{0} -z^{-n} & \text{si } |z| < 1, \\ = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} & \text{si } |z| > 1. \end{cases}$$
$$\frac{-1}{z-2} = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{0} 2^{n-1}z^{-n} & \text{si } |z| < 2, \\ \sum_{n=1}^{\infty} -2^{n-1}z^{-n} & \text{si } |z| > 2. \end{cases}$$
$$\frac{2}{(z-2)^2} = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{0} -(n-1)2^{n-1}z^{-n} & \text{si } |z| < 2, \\ -\sum_{n=1}^{\infty} -(n-1)2^{n-1}z^{-n} & \text{si } |z| > 2. \end{cases}$$

On en déduit :

$$\forall z, |z| < 1 \quad X[z] = \sum_{n=-\infty}^{0} -z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{0} 2^{n-1}z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{0} -(n-1)2^{n-1}z^{-n}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{0} \left(-1 + (2-n)2^{n-1}\right) z^{-n}$$
$$\forall z, 1 < |z| < 2 \quad X[z] = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{0} 2^{n-1}z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{0} -(n-1)2^{n-1}z^{-n}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{0} (2-n)2^{n-1}z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}$$
$$\forall z, 2 < |z| \quad X[z] = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} -2^{n-1}z^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} -(n-1)2^{n-1}z^{-n}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(1 + (n-2)2^{n-1})z^{-n}$$

On lit alors immédiatement :

— Si le domaine de convergence est $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z| < 1\}$,
$$x_n = \begin{cases} (-1 + (2-n)2^{n-1} & n \leq 0, \\ 0 & n > 0. \end{cases}$$
— Si le domaine de convergence est $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 1 < |z| < 2\}$,
$$x_n = \begin{cases} (2-n)2^{n-1} & n \leq 0, \\ 1 & n > 0. \end{cases}$$
— Si le domaine de convergence est $D_3 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 2 < |z|\}$,
$$x_n = \begin{cases} 0 & n \leq 0, \\ 1 + (n-2)2^{n-1} & n > 0. \end{cases}$$

Ces résultats peuvent se retrouver à l'aide de la formule d'inversion de la transformée en z en calculant des intégrales par le théorème des résidus. *** À FAIRE UN JOUR ***

Exercice 16: transformée en z, filtre à temps discret Soit un filtre de réponse impulsionnelle :

$$h_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^n & \text{si } n \geq 0. \end{cases}$$

1. En justifiant uniquement à partir de cette réponse impulsionnelle :

(a) Que peut-on dire de la causalité du filtre ?

(b) Que peut-on dire de la stabilité du filtre ?

2. (a) Calculer $H[z]$, fonction de transfert en z du filtre de réponse impulsionnelle h_n. Préciser le domaine de convergence considéré pour la transformée en z.

(b) Préciser comment se retrouvent la stabilité (ou non) et la causalité (ou non) à partir du domaine de convergence.

(c) Trouver la relation de récurrence entrée-sortie du filtre $H[z]$.

3. (a) Sur quel autre domaine l'expression trouvée pour $H[z]$ converge-t-elle ? Ce domaine correspond-il à un filtre stable ? causal ?

(b) On note u_n le signal à temps discret dont la transformée en z (notée $U[z]$) a la même expression que $H[z]$, mais le domaine de convergence est le deuxième domaine évoqué à la question précédente. Calculer les u_n.

Réponses exercice: 16

1. (a) Causal car $h_n = 0$ pour $n < 0$.

(b) Instable car h_n diverge (réponse à une impulsion de Dirac, bornée).

2. (a) Sur le domaine $|z| > \frac{3}{2}$ (càd $|\frac{3}{2}z^{-1}| < 1$), $H[z] = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{3}{2}\right)^n z^{-n} = \frac{1}{1-\frac{3}{2}z^{-1}}$.

(b) Causal car convergence sur le complémentaire d'un disque, instable car le cercle unité n'appartient pas au domaine de convergence.

(c) En notant y_n la sortie et x_n l'entrée, $y_n = x_n + \frac{3}{2}y_{n-1}$.

3. (a) Sur le domaine $|z| < \frac{3}{2}$ (càd $|\frac{2}{3}z| < 1$), domaine correspondant à un filtre stable non causal.

(b) Sur le domaine $|z| < \frac{3}{2}$,

$$U[z] = \frac{1}{1-\frac{3}{2}z^{-1}} = \frac{-1}{\frac{3}{2}z^{-1}}\frac{1}{1-\frac{2}{3}z} = \frac{-1}{\frac{3}{2}z^{-1}}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{3}z\right)^n = -\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} z^{n+1} = -\sum_{n\leq 1}\left(\frac{2}{3}\right)^{-n} z^{-n}$$

d'où

$$u_n = \begin{cases} -\left(\frac{3}{2}\right)^n & \text{si } n \leq 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 0. \end{cases}$$

Exercice 17: transformée en z, filtre à temps discret

1. Soit le signal à temps discret $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ défini par :

$$x_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } n \geq 0, \\ 0 & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Calculer la transformée en z du signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Quel est le domaine de convergence correspondant ?

2. Le signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est appliqué à l'entrée du filtre stable et causal défini par la fonction de transfert en z :

$$H[z] = \frac{1}{1-4z}$$

On note $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la sortie correspondante du filtre.
Justifier l'existence d'un filtre stable et causal défini par cette fonction de transfert. Donner la relation de récurrence entrée-sortie qui correspond à $H[z]$.

3. Donner la relation entre les transformées en z $X[z]$ et $Y[z]$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ respectivement et le domaine sur lequel cette relation est valable. En déduire la séquence $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Réponses exercice: 17

1. Sur le domaine de convergence $|z| > 1/2$,

$$X[z] = \frac{2z}{2z-1}$$

2. Unique pôle de $H[z]$ en $1/4$, de module < 1. D'où l'existence d'un filtre stable et causal de fonction de transfert $H[z]$. Relation de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $y_n = \frac{1}{4}(y_{n-1} - x_{n-1})$.

3. Sur le domaine $|z| > 1/2$, on a $Y[z] = H[z]X[z]$ et on obtient après décomposition en éléments simples :

$$Y[z] = \frac{1}{4z-1} - \frac{1}{2z-1}$$

Un développement en série sur le domaine considéré donne $y_n = 4^{-n} - 2^{-n}$ si $n > 0$ et $y_n = 0$ si $n \leq 0$.

Exercice 18: tranformée en z, filtre à temps discret

1. Soit le filtre à temps discret suivant, causal et défini par la relation de récurrence entre son entrée $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et sa sortie $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad y_n = \frac{1}{2}y_{n-1} + x_n$$

(a) Quelle est la fonction de transfert en z $H[z]$ de ce filtre et le domaine de convergence correspondant ?

(b) Ce filtre est-il stable ? Justifier.

(c) Le filtre est-il de réponse impulsionnelle finie ou infinie ? Calculer cette réponse impulsionnelle.

2. Ce filtre est attaqué en entrée par le signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ défini par :

$$x_n = \begin{cases} 3^{-(n-1)} & \text{si } n \geq 1, \\ 0 & \text{si } n \leq 0. \end{cases}$$

(a) Calculer la transformée en z $X[z]$ du signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Quelle est la transformée en z $Y[z]$ du signal de sortie $(y_n)_{n\in Z}$?

(b) Calculer la sortie $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Réponses exercice: 18

1. (a) Sur le domaine de convergence $|z| > 1/2$,

$$H[z] = \frac{1}{1 - z^{-1}/2}.$$

(b) Filtre stable car unique pôle en $1/2$ et le domaine de convergence contient donc le cercle unité.

(c) Réponse impulsionnelle infinie : $h_n = 2^{-n}$ si $n \geq 0$ et $h_n = 0$ si $n < 0$.

2. (a)

$$X[z] = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}/3} \qquad Y[z] = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1}/2)(1 - z^{-1}/3)}.$$

(b) En développant $Y[z]$ sur le domaine $|z| > 1/2$, $y_n = 3/2^{n-1} - 2/3^{n-1}$ si $n \geq 1$ et $y_n = 0$ sinon.

Exercice 19: filtre à temps discret On s'intéresse à un filtrage à temps discret dont le schéma ci-dessous donne les notations :

$$\xrightarrow{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}} \boxed{(h_n)\ /\ H[z]} \xrightarrow{(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}}$$

La réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 1/2 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Uniquement à partir de la réponse impulsionnelle, dire (en justifiant) si le filtre précédent est :
— stable ?
— causal ?

2. Exprimer à un instant n donné la sortie $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ du filtre ci-dessus en fonction de l'entrée $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Quel(s) nom(s) donne-t-on à un filtre ayant un relation entrée-sortie de ce type ?

3. Déterminer la fonction de transfert en z ainsi que la réponse en fréquence $H(f)$ de ce même filtre.

4. Calculer $|H(f)|^2$ et tracer son allure en fonction de f. En déduire si le type de filtre (passe-haut, passe-bas, passe-bande, coupe-bande).

5. On s'intéresse maintenant au filtre inverse du filtre précédent :

$$\xrightarrow{(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}} \boxed{(g_n)\ /\ G[z]} \xrightarrow{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}}$$

Pour le filtre $G[z]$ ci-dessus, exprimer la relation de récurrence donnat la sortie a_n à un instant n donné en fonction de l'entrée b_n et d'autres valeurs de la sortie. Calculer la fonction de transfert $G[z]$.

6. Préciser le domaine de convergence de $G[z]$ en indiquant la causalité (ou non). En déduire la stabilité (ou non) du filtre $G[z]$. On veillera à bien justifier les réponses.

7. Calculer la réponse impulsionnelle $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ correspondant à $G[z]$. Quel(s) nom(s) donne-t-on à un filtre satisfaisant une relation de récurrence comme $G[z]$ et ayant une réponse impulsionnelle du type de $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$?

Réponses exercice: 19

1. Stable car réponse impulsionnelle sommable. Causal car $h_n = 0$ pour $n < 0$.

2. $b_n = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1}$. On parle de filtre réponse impulsionnelle finie ou MA (moving average càd en français moyenne mobile).

3. $H[z] = 1 + \frac{1}{2}z^{-1}$ et $H(f) = 1 + \frac{1}{2}e^{-\mathrm{i}2\pi f}$

4. $|H(f)|^2 = \frac{5}{4} + \cos 2\pi f$. Il s'agit d'un filtre passe-bas.

5. $a_n = b_n - \frac{1}{2}a_{n-1}$ et $G[z] = 1/(1 + \frac{1}{2}z^{-1}) = 1/H[z]$.

6. $G[z]$ est stable et causal, le domaine de convergence de $G[z]$ est $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > 1/2\}$. La causalité ressort directement de l'équation de récurrence. La stabilité se constate au travers du domaine de convergence, qui a été choisi en cohérence avec la causalité (complémentaire d'un disque de rayon plus petit que 1 puisque unique pôle situé à l'intérieur du cercle unité). La stabilité se constate aussi par la sommabilité de $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

7. $g_n = 0$ pour $n < 0$ et $g_n = (-1/2)^n$ pour $n \geq 0$. Il s'agit d'un filtre récursif et de réponse impulsionnelle infinie.

Exercice 20: filtre à temps discret On s'intéresse à un filtrage à temps discret dont le schéma ci-dessous donne les notations :

$$(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \longrightarrow \boxed{(h_n)\ /\ H[z]} \longrightarrow (b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

La réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ -1/2 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Uniquement à partir de la réponse impulsionnelle, dire (en justifiant) si le filtre est :
- — stable ?
- — causal ?

2. Exprimer à un instant n donné la sortie $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ du filtre ci-dessus en fonction de l'entrée $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

3. Déterminer la fonction de transfert en z $H[z]$ ainsi que la réponse en fréquence $H(f)$ de ce même filtre.

4. Calculer $|H(f)|^2$ et tracer son allure en fonction de f. En déduire le type de filtre (passe-haut, passe-bas, passe-bande, coupe-bande).

5. On s'intéresse maintenant au filtre causal, inverse du filtre précédent :

$$(b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \longrightarrow \boxed{(g_n)\ /\ G[z]} \longrightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

Exprimer à un instant n donné la sortie $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ du filtre ci-dessus en fonction de cette sortie avant l'instant n et de l'entrée $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Calculer la fonction de transfert $G[z]$.

6. Préciser le domaine de convergence de $G[z]$ et en déduire la stabilité (ou non) du filtre $G[z]$.

7. Calculer la réponse impulsionnelle de $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et retrouver la stabilité (ou non) du filtre à partir de $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

8. Parmi les acronymes AR, MA, ARMA, RIF, RII, dire en précisant leur signification, ceux que l'on donne aux filtres de fonction de transfert $H[z]$ et $G[z]$ respectivement.

Réponses exercice: 20

1. Stable car réponse impulsionnelle sommable. Causal car $h_n = 0$ pour $n < 0$.

2. $b_n = a_n - \frac{1}{2}a_{n-1}$.

3. $H[z] = 1 - \frac{1}{2}z^{-1}$ et $H(f) = 1 - \frac{1}{2}e^{-i2\pi f}$

4. $|H(f)|^2 = \frac{5}{4} - \cos 2\pi f$. Il s'agit d'un filtre passe-haut.

5. $a_n = b_n + \frac{1}{2}a_{n-1}$ et $G[z] = 1/(1 - \frac{1}{2}z^{-1}) = 1/H[z]$.

6. Le domaine de convergence de $G[z]$ est $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1/2\}$, en conformité avec la causalité. Ce domaine de convergence contient le cercle unité, ce qui indique la stabilité. En d'autres termes, le domaine de convergence est le compléntaire d'un disque de rayon plus petit que 1 puisque l'unique pôle est situé à l'intérieur du cercle unité.

7. $g_n = 0$ pour $n < 0$ et $g_n = (1/2)^n$ pour $n \geq 0$. La stabilité se constate par la sommabilité de $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

8. $H[z]$ est un filtre RIF (réponse impulsionnelle finie), de type MA (moving average càd en français moyenne mobile). Son inverse $G[z]$ est un filtre RII (réponse impulsionnelle infinie), de type AR (auto-régressif, ou encore récursif).

Exercice 21: synthèse d'un filtre numérique Cet exercice est un exemple simple de synthèse de filtre numérique. On note $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ la réponse impulsionnelle de ce filtre et $H(f)$ sa réponse en fréquence.

1. Dans tout l'énoncé, les fréquences sont normalisées (ou réduites) et la lettre f désigne une telle fréquence. Si F_e est la fréquence d'échantillonnage des signaux d'origine, quelle lien existe-t-il entre f, F_e et la fréquence réelle ?

2. Le filtre que l'on souhaite synthétiser est un filtre numérique passe-bas idéal de fréquence de coupure f_0 (réponse en fréquence égale à 1 dans la bande passante et nulle en dehors). Les coefficients du filtre sont à valeurs réelles. Quelles est la plage de valeurs ayant un sens pour la fréquence normalisée f_0 ? Préciser ce que vaut la fonction $H(f)$ et la tracer en fonction de f sur l'intervalle $[-1, 1]$.

3. Comment s'exprime $H(f)$ en fonction des coefficients $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de la réponse impulsionnelle ? Remarquer alors que l'on peut écrire $h_k = \int_{-1/2}^{1/2} H(f)e^{+i2\pi kf}\, df$ pour tout k et calculer les valeurs de $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

4. Le filtre obtenu est-t-il de réponse impulsionnelle finie ou infinie ? Est-il causal ou non ?

5. On regarde maintenant successivement comment une troncature puis un décalage de la réponse impulsionnelle $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ obtenue permet d'approcher le fitre souhaité.

(a) Proposer une solution pour obtenir à partir de $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un filtre approché de réponse impulsionnelle finie avec 5 coefficients non nuls. On notera $(\tilde{h}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ la réponse impulsionnelle de ce filtre approché.

(b) Proposer une solution pour obtenir à partir de $(\tilde{h}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un filtre causal de réponse impulsionnelle finie avec 5 coefficients non nuls. On notera $(g_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ce dernier filtre obtenu.

6. Comment s'exprime $G[z]$, fonction de transfert en z du filtre $(g_k)_{k\in\mathbb{Z}}$? Quels sont les pôles de $G[z]$? Que peut-on en déduire en terme de stabilité ?

7. Que peut-on dire de façon générale concernant la stabilité d'un filtre de réponse impulsionnelle finie ?

Réponses exercice: 21

1. La fréquence réelle est égale au produit fFe.

2. f_0 compris entre 0 et 1/2. $H(f)$ est périodique, période 1 et telle que

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f \in [0, f_0] \cup [1 - f_0, 1] \\ 0 & \text{si } f \in]f_0, 1 - f_0[. \end{cases}$$

3. $H(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k e^{-i2\pi kf}$; $h_k = 2f_0\text{sinc}(2\pi kf_0)$.

4. Réponse impulsionnelle infinie, non causal.

5. (a) Troncature : prendre $\tilde{h}_k = \begin{cases} h_k & \text{si } k = -2, -1, 0, 1 \text{ ou } 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

(b) Décalage de la réponse impulsionnelle : $g_k = \tilde{h}_{k-2}$.

6. $G[z] = g_0 + g_1z^{-1} + g_2z^{-2} + g_3z^{-3} + g_4z^{-4}$. Le seul pôle de $G[z]$ est $z = 0$, à l'intérieur du cercle unité. $G[z]$ est donc stable.

7. Un filtre de réponse impulsionnelle finie est toujours stable.

Exercice 22: cryptage vocal simple

1. Soit un signal réel à temps discret noté $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. On définit un nouveau signal à temps discret $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en changeant le signe d'un échantillon sur deux, c'est-à-dire pour tout n, $y_n = (-1)^n x_n$.

(a) Exprimer la transformée en z $Y[z]$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en fonction de celle de $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ notée $X[z]$.

(b) Rappeler le lien entre la transformée en z et la transformée de Fourier à temps discret. En déduire le lien suivant entre les transformées de Fourier à temps discret respectives : $Y(f) = X(f + \frac{1}{2})$.

(c) Expliquer pourquoi l'opération qui à $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ associe $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ «inverse» les hautes et les basses fréquences.

2. La technique précédente peut être utilisée pour le cryptage d'un signal de téléphonie. On suppose que $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est le signal numérique provenant de l'échantillonnage à 8kHz d'un signal vocal de téléphonie, dont le spectre s'étend de 300Hz à 3400Hz.

(a) Représenter de manière schématique le spectre du signal numérique de téléphonie en fonction de la fréquence réelle (on indiquera sur le schéma la fréquence d'échantillonnage).

(b) Représenter de manière schématique le spectre du signal $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ correspondant en fonction de la fréquence réelle. (on indiquera sur le schéma la fréquence d'échantillonnage).

(c) Justifier que le signal analogique synthétisé à partir de $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ne soit plus intelligible.

Réponses exercice: 22

1. (a) $Y[z] = \sum_n y_n z^{-n} = \sum_n (-1)^n x_n z^{-n} = X[-z]$

(b) $Y(f) = Y[e^{i2\pi f}] = X[-e^{i2\pi f}] = X[e^{i2\pi(f+\frac{1}{2})}] = X(f + \frac{1}{2})$.

(c) La fréquence 0 devient la fréquence 1/2 et réciproquement (voir aussi les dessins à faire dans les questions suivantes).

2. (a) Dessin à faire.

(b) Dessin à faire.

(c) Lié à l'inversion des hautes et basses fréquences.

Exercice 23: filtre à minimum de phase On considère le filtre à temps discret défini par la relation de récurrence suivante entre le signal d'entrée $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et de sortie $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$:

$$y_n = x_n - 2x_{n-1} + 2x_{n-2}$$

1. Donner la réponse impulsionnelle $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ du filtre en question. Le filtre est-il récursif ? de réponse impulsionnelle finie ou infinie ? causal ? stable ou instable ?

2. Notons $X[z]$ (resp. $Y[z]$) la transformée en z de $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ (resp. $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$). Donner le lien entre $X[z]$, $Y[z]$ et la fonction de transfert en z du filtre, notée $H[z]$. Calculer l'expression de $H[z]$ et préciser le(s) zéro(s) et le(s) pôle(s) du filtre. Retrouve-t-on les propriétés de stabilité et causalité ?

3. Soit $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| \neq 1$ et soit le filtre défini par sa fonction de transfert en z : $\Phi[z] = \frac{1-\alpha z^{-1}}{\alpha^* - z^{-1}}$. Rappeler le lien entre la réponse fréquentielle $\Phi(f)$ de ce filtre et $\Phi[z]$. En déduire qu'il s'agit d'un filtre passe-tout (module de la réponse fréquentielle constant égal à un).

4. En écrivant le filtre $H[z]$ sous la forme $H[z] = (1 - \alpha_1 z^{-1})(1 - \alpha_2 z^{-1})$, montrer qu'il est possible de le factoriser sous la forme $H[z] = H_{\mathrm{PT}}[z]H_{\min}[z]$ où $H_{\mathrm{PT}}[z]$ est un filtre passe-tout et $H_{\min}[z]$ est un filtre dont les pôles et les zéros sont à l'intérieur du cercle unité. On traitera chacun des zéros α_1 *et* α_2 en s'inspirant de la question précédente.

5. Un filtre tel que $H_{\min}[z]$ dont les zéros et les pôles sont à l'intérieur du cercle unité est dit filtre à minimum de phase. Que peut on dire en terme de stabilité et de causalité pour l'*inverse* d'un filtre à minimum de phase qui n'a pas de zéro sur le cercle unité ?

Réponses exercice: 23

1. Réponse impulsionnelle :

$$h_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ -2 & \text{si } n = 1, \\ 2 & \text{si } n = 2. \end{cases}$$

Filtre non récursif, de réponse impulsionnelle finie, causal et stable.

2. $Y[z] = H[z]X[z]$ et $H[z] = 1 - 2z^{-1} + 2z^{-2}$. $z_0 = 0$ est unique pôle ; $\alpha_1 = 1 + \mathrm{i}$ et $\alpha_2 = 1 - \mathrm{i}$ sont les zéros. Les pôles sont strictement à l'intérieur du cercle unité, d'où stabilité et causalité.

3. $\Phi(f) = \Phi[e^{\mathrm{i}2\pi f}]$ et donc :

$$|\Phi(f)| = \left| \frac{1 - \alpha e^{-\mathrm{i}2\pi f}}{\alpha^* - e^{-\mathrm{i}2\pi f}} \right| = |e^{+\mathrm{i}2\pi f}| \left| \frac{1 - \alpha e^{-\mathrm{i}2\pi f}}{\alpha^* e^{+\mathrm{i}2\pi f} - 1} \right| = 1$$

4.

$$H[z] = (1 - \alpha_1 z^{-1})(1 - \alpha_2 z^{-1}) = \frac{1 - \alpha_1 z^{-1}}{\alpha_1^* - z^{-1}} \frac{1 - \alpha_2 z^{-1}}{\alpha_2^* - z^{-1}} (\alpha_1^* - z^{-1})(\alpha_2^* - z^{-1}) = H_{\mathrm{PT}}[z] H_{\min}[z]$$

avec $H_{\mathrm{PT}}[z] = \frac{1-\alpha_1 z^{-1}}{\alpha_1^* - z^{-1}} \frac{1-\alpha_2 z^{-1}}{\alpha_2^* - z^{-1}}$ et $H_{\min}[z] = (\alpha_1^* - z^{-1})(\alpha_2^* - z^{-1})$. (car $|\alpha_1| > 1$ et $|\alpha_2| > 1$).

5. Les pôles de $1/H_{\min}[z]$ sont les zéros de $H_{\min}[z]$ et réciproquement. Dans la mesure où $H_{\min}[z]$ a ses zéros tous strictement à l'intérieur du cercle unité, les pôles de $1/H_{\min}[z]$ sont aussi tous strictement à l'intérieur du cercle unité et $H_{\min}[z]$ admet donc un inverse stable et causal.

Exercice 24: banc de filtres et analyse en sous-bandes Le but de cet partie est d'étudier quelques propriétés simples à la base d'une analyse en sous-bandes.

1. On considère des signaux à temps discret $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Le signal b_n est obtenu à partir de a_n par :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad b_n = a_{2n}$$

Les échantillons pairs uniquement sont conservés ; on parle d'opération de décimation d'un facteur deux, ce que l'on note par le signe $2\downarrow$. Le signal c_n est obtenu à partir de b_n par :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad \begin{cases} c_{2n} = b_n, \\ c_{2n+1} = 0. \end{cases}$$

Cette opération qui consiste à intercaler un zéro entre deux échantillons est notée $2\uparrow$. L'opération globale est résumée sur le schéma de la figure 4.

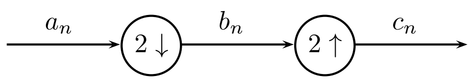


FIGURE 4 – Sur- et sous-échantillonnage d'un facteur 2.

D'après la description ci-dessus, que valent les échantillons $b_0, b_1, \ldots, b_9$ et $c_0, c_1, \ldots, c_9$ en fonction des échantillons du signal a_n.

2. Rappeler la définition de la transformée en z d'un signal. Démontrer la relation :

$$C[z] = \frac{A[z] + A[-z]}{2}$$

où $A[z], B[z]$ et $C[z]$ sont les transformées en z respectives de a_n, b_n et c_n.

3. On considère maintenant le système de la figure 5 où $H_0[z], H_1[z], \widetilde{H_0}[z], \widetilde{H_1}[z]$ représentent des fonctions de transfert en z de filtres. En utilisant la question précédente, trouver le lien entre $Y[z]$ et $X[z]$, transformées en z respectives de y_n et x_n.

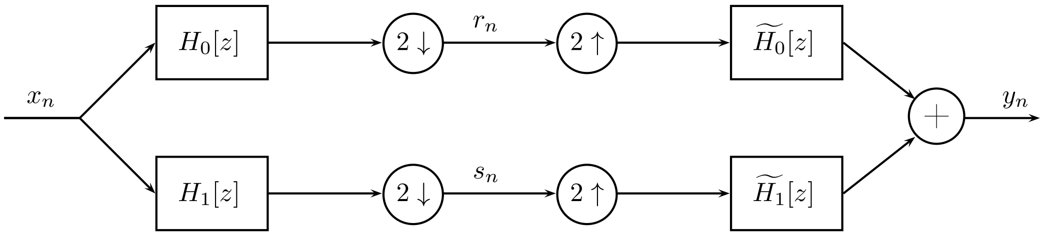


FIGURE 5 – Schéma de l'analyse en deux sous-bandes

4. Déduire de la question précédente que l'on retrouve exactement $X[z]$ en sortie du système si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées (on parle alors de reconstruction parfaite du signal x_n) :

$$\begin{cases} H_0[-z]\widetilde{H_0}[z] + H_1[-z]\widetilde{H_1}[z] = 0 & \text{(7a)} \\ H_0[z]\widetilde{H_0}[z] + H_1[z]\widetilde{H_1}[z] = 2 & \text{(7b)} \end{cases}$$

5. On choisit dorénavant de se placer dans le cas :

$$\begin{cases} H_1[z] = H_0[-z] \\ \widetilde{H_0}[z] = H_0[z] \\ \widetilde{H_1}[z] = -H_0[-z] \end{cases} \tag{8}$$

Montrer que (7a) est vérifiée et donner la contrainte qu'entraîne la condition (7b) sur $H_0[z]$.

6. On suppose que la réponse impulsionnelle de $H_0[z]$ est paire, càd que cette réponse impulsionnelle vérifie : $\forall n \in \mathbb{Z}, h_n = h_{-n}$.

(a) Justifier que $H_0[z] = H_0[z^{-1}]$ dans ce cas.

(b) En déduire $H_1[z] = H_0[-z^{-1}]$.

(c) Rappeler le lien entre la transformée en z d'une réponse impulsionnelle et la réponse en fréquence. Déduire alors de la question précédente que $H_1(f) = H_0(1/2 - f)$. On parle pour $H_1[z]$ et $H_0[z]$ de filtres miroirs en quadrature.

(d) On suppose que $H_0[z]$ est un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure normalisée 1/4. Tracer schématiquement le module de la réponse fréquentielle de $H_0[z]$ et de $H_1[z]$. Le filtre $H_1[z]$ est-il passe-bas, passe-haut ou passe-bande ?

7. On abandonne l'hypothèse de symétrie de la réponse impulsionnelle de $H_0[z]$. En effectuant le choix (8), il n'existe pas de solution de réponse impulsionnelle finie satisfaisant (7b). On affaiblit cette contrainte en :

$$H_0[z]\widetilde{H_0}[z] + H_1[z]\widetilde{H_1}[z] = 2z^k \tag{9}$$

où k est un entier, $k \geq 1$.

(a) Pour la reconstruction parfaite, que signifie la présence d'une puissance de z dans (9) vis à vis de (7b) ?

(b) Montrer que pour $k = 1$, l'expression $H_0[z] = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + z)$ est une solution. On l'appelle filtre de Haar.

8. Quel peut être l'intérêt d'un système tel que celui de la figure 5 qui permet de décomposer le signal initial en deux signaux r_n et s_n ?

Réponses exercice: 24

1. $b_0 = a_0, b_1 = a_2, b_2 = a_4, \ldots$ et $c_0 = a_0, c_1 = 0, c_2 = a_2, c_3 = 0, c_4 = a_4, c_5 = 0, \ldots$.

2.

$$C[z] = \sum_n c_n z^{-n} = \sum_p \left(c_{2p} z^{-2p} + c_{2p+1} z^{-(2p+1)}\right) = \sum_p b_p z^{-2p} = B[z^2]$$

$$\begin{aligned} C[z] &= \sum_n c_n z^{-n} = \sum_p \left(c_{2p} z^{-2p} + c_{2p+1} z^{-(2p+1)}\right) = \sum_p a_{2p} z^{-2p} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_p a_{2p} z^{-2p} + \sum_p a_{2p+1} z^{-(2p+1)} + \sum_p a_{2p}(-z)^{-2p} + \sum_p a_{2p+1}(-z)^{-(2p+1)}\right) \\ &= \frac{A[z] + A[-z]}{2} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} Y[z] &= \widetilde{H_0}[z]\frac{H_0[z]X[z] + H_0[-z]X[-z]}{2} + \widetilde{H_1}[z]\frac{H_1[z]X[z] + H_1 x[-z]X[-z]}{2} \\ &= \frac{\widetilde{H_0}[z]H_0[z] + \widetilde{H_1}[z]H_1[z]}{2}X[z] + \frac{\widetilde{H_0}[z]H_0[-z] + \widetilde{H_1}[z]H_1[-z]}{2}X[-z] \end{aligned}$$

4. La question précédente indique que $Y[z] = X[z]$ lorsque les conditions indiquées sont satisfaites.

5. La première condition est satisfaite et on vérifie que la deuxième devient :

$$H_0[z] - H_0[-z]^2 = 2$$

6. (a) $H_0[z] = \sum_n h_n z^{-n} = \sum_n h_{-n} z^{-n} = \sum_n h_n z^n = H_0[z^{-1}]$

(b) $H_1[z] = H_O[-z] = H_0[-z^{-1}]$

(c) D'après la question précédente $H_1[e^{i2\pi f} = H_0[e^{i\pi - i2\pi f}]$ d'où $H_1(f) = H_0(1/2 - f)$.

(d) Si $H_0[z]$ est passe-bas idéal de fréquence de coupure normalisée $1/4$, $H_1[z]$ est passe-haut idéal, même fréquence de coupure.

7. (a) La reconstruction parfaite est souhaitée à un retard près.

(b) Vérification facile.

8. Décomposition et codage en deux sous-bandes : l'une contenant plutôt les basses fréquences et l'autre les hautes fréquences.

Exercice 25: transformée en cosinus discrète Cet exercice redémontre quelques propriétés de la transformée de Fourier discrète (TFD) et introduit à partir de celle-ci la transformée en cosinus discrète qui est très utilisée dans les algorithmes de compression d'images (normes JPEG, MPEG,...).

1. On considère les N échantillons $(x_n)_{n=0,\ldots,N-1}$ d'un signal à temps discret de durée finie. On rappelle que la transformée de Fourier à temps discret (TFTD) de $(x_n)_{n=0,\ldots,N-1}$ s'exprime par la somme (ici finie) :

$$X(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi k f}$$

On notera $(X_n)_{n=0,\ldots,N-1}$ la TFD de $(x_n)_{n=0,\ldots,N-1}$.

(a) Rappeler comment la TFD s'interprète comme les valeurs de la TFTD en N points de l'intervalle unité. Donner l'expression de $(X_n)_{n=0,\ldots,N-1}$. Montrer que l'on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix} = \mathbf{W} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{W}$ est la matrice $\mathbf{W} = (w^{(k-1)(l-1)})_{k,l=1,\ldots,N}$, avec $w \in \mathbb{C}$ à préciser.

(b) Calculer $\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathrm{H}}$. En déduire le lien entre $\sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2$ et $\sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2$ ainsi que la formule de la TFD inverse.

2. A partir de maintenant, on pose $N = 2P$ et on suppose que $(x_n)_{n=0,\ldots,2P-1}$ est réel. Quelle relation de symétrie cela entraîne-t-il pour les coefficients X_k ?

3. On fait l'hypothèse supplémentaire que $\forall n \in \{0, \ldots, 2P-1\} \qquad x_{2P-1-n} = x_n$.
Montrer que cela permet d'écrire :

$$\forall k \in \{0, \ldots, P\} \qquad \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\pi k}{2P}\right) X_k = A_k$$

où $A_k \in \mathbb{R}$ est à préciser.

4. Que vaut X_P ?

5. En déduire que $\forall n \in \{0, \ldots, P-1\}, \qquad x_n = \dfrac{1}{P}\left(\dfrac{A_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{P-1} A_k \cos\left(\frac{\pi k}{P}(n + \frac{1}{2})\right)\right).$

6. La transformée en cosinus discrète de $(x_n)_{n=0,\ldots,P-1}$ est définie par les coefficients $(\widetilde{A}_k)_{k=0,\ldots,P-1}$ tels que :

$$\widetilde{A}_k = \begin{cases} \frac{A_0}{2\sqrt{P}} & \text{si } k = 0, \\ \frac{A_k}{\sqrt{2P}} & \text{si } k \in \{1, \ldots, P-1\}. \end{cases}$$

Vérifier que cette transformation conserve l'énergie du signal, càd que $\sum_{n=0}^{P-1} x_n^2 = \sum_{k=0}^{P-1} \widetilde{A}_k^2$.

Réponses exercice: 25

1. Voir cours.

2. Pour tout $k \in \{1, \ldots, 2P-1\}$:

$$X_{2P-k} = \sum_{j=0}^{2P-1} x_j e^{-\mathrm{i}2\pi\frac{j(2P-k)}{2P}} = \sum_{j=0}^{2P-1} x_j e^{\mathrm{i}2\pi\frac{jk}{2P}} = \left(\sum_{j=0}^{2P-1} x_j^* e^{-\mathrm{i}2\pi\frac{jk}{2P}}\right)^* = \left(\sum_{j=0}^{2P-1} x_j e^{-\mathrm{i}2\pi\frac{jk}{2P}}\right)^* = X_k^*$$

3. Pour tout $k \in \{0, \ldots, P\}$:

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{j=0}^{P-1} x_j e^{-\mathrm{i}2\pi\frac{jk}{2P}} + \sum_{j=P}^{2P-1} x_j e^{-\mathrm{i}2\pi\frac{jk}{2P}} = \sum_{j=0}^{P-1} x_j e^{-\mathrm{i}2\pi\frac{jk}{2P}} + \sum_{l=0}^{P-1} x_{2P-1-l} e^{-\mathrm{i}2\pi\frac{(2P-1-l)k}{2P}} \\ &= \sum_{j=0}^{P-1} x_j \left(e^{-\mathrm{i}2\pi\frac{jk}{2P}} + e^{-\mathrm{i}2\pi\frac{(2P-1-j)k}{2P}}\right) = \sum_{j=0}^{P-1} x_j \left(e^{-\mathrm{i}2\pi\frac{jk}{2P}} + e^{\mathrm{i}2\pi\frac{jk}{2P}} e^{\mathrm{i}2\pi\frac{k}{2P}}\right) \\ &= e^{\mathrm{i}\pi\frac{k}{2P}} \sum_{j=0}^{P-1} x_j \left(e^{-\mathrm{i}2\pi\frac{jk}{2P}} e^{-\mathrm{i}\pi\frac{k}{2P}} + e^{\mathrm{i}2\pi\frac{jk}{2P}} e^{\mathrm{i}\pi\frac{k}{2P}}\right) = e^{\mathrm{i}\pi\frac{k}{2P}} \sum_{j=0}^{P-1} 2x_j \cos\left(\frac{\pi k}{P}(j + \frac{1}{2})\right) \end{aligned}$$

et donc $\forall k \in \{0, \ldots, P\}, e^{-\mathrm{i}\pi\frac{k}{2P}} X_k = A_k \in \mathbb{R}$ avec $A_k = \sum_{j=0}^{P-1} 2x_j \cos\left(\frac{\pi k}{P}(j + \frac{1}{2})\right)$

4. $X_P = 0$.

5. Puisque $X_P = 0$, on a pour tout $n \in \{0, \dots, P-1\}$:

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{1}{2P}\sum_{k=0}^{2P-1} X_k e^{\mathrm{i}2\pi\frac{kn}{2P}} = \frac{1}{2P}X_0 + \frac{1}{2P}\sum_{k=1}^{P-1} X_k e^{\mathrm{i}\pi\frac{kn}{P}} + \frac{1}{2P}\sum_{k=P+1}^{2P-1} X_k e^{\mathrm{i}\pi\frac{kn}{P}} \\
&= \frac{1}{2P}X_0 + \frac{1}{2P}\sum_{k=1}^{P-1}\left(X_k e^{\mathrm{i}\pi\frac{kn}{P}} + X_{2P-k}e^{\mathrm{i}\pi\frac{(2P-k)n}{P}}\right) = \frac{1}{2P}X_0 + \frac{1}{2P}\sum_{k=1}^{P-1}\left(X_k e^{\mathrm{i}\pi\frac{kn}{P}} + X_k^* e^{-\mathrm{i}\pi\frac{kn}{P}}\right) \\
&= \frac{A_0}{2P} + \frac{1}{2P}\sum_{k=1}^{P-1}\left(A_k e^{\mathrm{i}\pi(\frac{kn}{P}+\frac{k}{2P})} + A_k e^{-\mathrm{i}\pi(\frac{kn}{P}+\frac{k}{2P})}\right) = \frac{1}{P}\left[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{P-1} A_k \cos\left(\frac{\pi k}{P}(n+\frac{1}{2})\right)\right]
\end{aligned}$$

6.

$$\sum_{k=0}^{P-1}\widetilde{A}_k^2 = \frac{1}{2P}\left[\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{P-1}A_k^2\right] = \frac{1}{2P}\left[\frac{|X_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{P-1}|X_k|^2\right] = \frac{1}{4P}\sum_{k=0}^{2P-1}|X_k|^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2P-1}x_n^2 = \sum_{k=0}^{P-1}x_n^2$$

Exercice 26: transformée en z

1. Calculer la transformée en z de $a_n = \cos(n\theta)$ si $n \geq 0$ et 0 sinon.

2. Calculer la transformée en z de $b_n = n+1$ si $n \geq 0$ et 0 sinon.

3. Calculer la transformée en z de $c_n = \frac{n+1}{n!}$ si $n \geq 0$ et 0 sinon.

4. Calculer la transformée en z de la suite causale définie par la relation de récurrence $\forall n \geq 0,\ d_n = 2d_{n-1} - d_{n-2} + 1$ (on appelle suite causale une suite telle que $d_n = 0$ pour tout $n < 0$). En déduire l'expression de d_n en fonction de n.

Réponses exercice: 26 On rappelle que

$$\forall x, |x| < 1 : \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n \quad \text{et par dérivations successives :}$$
$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 1} nx^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n$$
$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n\geq 2}\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} = \sum_{n\geq 0}\frac{(n+2)(n+1)}{2}x^n$$

1.

$$A[z] = \sum_{n\geq 0}\cos(n\theta)z^{-n} = \sum_{n\geq 0}\frac{e^{\mathrm{i}n\theta}+e^{-\mathrm{i}n\theta}}{2}z^{-n} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(e^{\mathrm{i}\theta}z^{-1})^n + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(e^{-\mathrm{i}\theta}z^{-1})^n$$

et donc pour |z|>1 : $$A[z] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-e^{\mathrm{i}\theta}z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-\mathrm{i}\theta}z^{-1}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{z}{z-e^{\mathrm{i}\theta}} + \frac{z}{z-e^{-\mathrm{i}\theta}}\right] = \frac{z^2 - z\cos\theta}{z^2 - 2z\cos\theta + 1}\,.$$

2. D'après les rappels ci-dessus, il vient :

$$\forall z, |z| > 1 : \qquad B[z] = \sum_{n\geq 0}(n+1)z^{-n} = \frac{1}{(1-1/z)^2} = \frac{z^2}{(z-1)^2}\,.$$

3. En utilisant la règle de d'Alembert, on constate que $C[z]$ converge sur $\mathbb{C}^*$.

$$C[z] = \sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{n!}z^{-n} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n-1)!}z^{-n} + \sum_{n\geq 0}\frac{z^{-n}}{n!} = z^{-1}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}z^{-n} + \sum_{n\geq 0}\frac{z^{-n}}{n!} = (z^{-1}+1)e^{1/z}\,.$$

4. On remarquera que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est entièrement définie puisque $d_n = 0$ pour $n < 0$ et la relation de récurrence définit ensuite les valeurs pour $n \geq 0$: $d_0 = 1, d_1 = 3, d_2 = 6, \dots$.
En prenant la transformée en z de la relation de récurrence (qui s'écrit $d_n = 2d_{n-1} - d_{n-2} + \mathbb{1}(n \geq 0)$), il vient $D[z] = 2z^{-1}D[z] - z^{-2}D[z] + \sum_{n\geq 0} z^{-n}$, valable sur le domaine $|z| > 1$. Par suite :

$$\text{Sur le domaine } |z| > 1 : \quad D[z] = \frac{1}{1-2z^{-1}+z^{-2}}\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{1}{(1-z^{-1})^3}\,.$$

On peut alors en déduire l'expression de d_n pour tout n par transformée en z inverse. D'après les rappels ci-dessus :

$$\forall z, |z| > 1 : \quad D[z] = \frac{1}{(1-z^{-1})^3} = \sum_{n\geq 0} \frac{(n+2)(n+1)}{2} z^{-n}$$

et donc $d_n = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ si $n \geq 0$ et est nul pour $n < 0$.

Exercice 27: transformée de Fourier temps discret Calculer la transformée de Fourier temps discret du signal :

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, 1, \ldots, N-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Réponses exercice: 27

$$\begin{aligned} X(f) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{-\mathrm{i}2\pi n f} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\mathrm{i}2\pi n f} = \frac{1-e^{-\mathrm{i}2\pi N f}}{1-e^{-\mathrm{i}2\pi f}} \\ &= \frac{e^{-\mathrm{i}\pi N f}}{e^{-\mathrm{i}\pi f}} \frac{\sin(\pi N f)}{\sin(\pi f)} = e^{\mathrm{i}\pi(1-N)f} \frac{\sin(\pi N f)}{\sin(\pi f)} \end{aligned}$$

Exercice 28: fonction d'autocorrélation / densité spectrale d'énergie Soit le signal à temps discret ($\alpha > 0$ est une constante)

$$x_n = \begin{cases} e^{-\alpha n} & \text{si } n \geq 0, \\ 0 & \text{si } n < 0\,. \end{cases} \tag{10}$$

1. Montrer que x_n est un signal d'énergie finie et calculer son énergie E_x.
2. Calculer la fonction d'autocorrélation en énergie $\gamma_x(k)$ et retrouver la valeur de E_x.
3. Calculer la densité spectrale d'énergie $\Gamma_x(f)$.
4. Retrouver E_x à partir de $\Gamma_x(f)$.
5. Exprimer (sans calculer) l'énergie du signal contenue dans la bande de fréquences $[-1/4, 1/4]$.

Réponses exercice: 28

1. $E_x = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-\alpha n})^2 = \frac{1}{1-e^{-2\alpha}}$.
2.

$$\forall k \geq 0, \quad \gamma_x(k) = \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\alpha n} e^{-\alpha(n-k)} = \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-\alpha(k+p)} e^{-\alpha p} = \frac{e^{-\alpha k}}{1-e^{-2\alpha}}$$

$$\forall k \leq 0, \quad \gamma_x(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\alpha n} e^{-\alpha(n-k)} = \frac{e^{\alpha k}}{1-e^{-2\alpha}} \quad \text{et donc finalement :}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \gamma_x(k) = \frac{e^{-\alpha|k|}}{1-e^{-2\alpha}}. \text{ On note que } E_x = \gamma_x(0)\,.$$

3. On peut faire le calcul au choix des deux façons suivantes :

$$\begin{aligned}
\Gamma_x(f) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_x(k) e^{-\mathrm{i}2\pi k f} = \frac{1}{1-e^{-2\alpha}}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k} e^{-\mathrm{i}2\pi f k}+\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k} e^{+\mathrm{i}2\pi f k}\right] \\
&= \frac{1}{1-e^{-2\alpha}}\left[1+\frac{e^{-\alpha} e^{-\mathrm{i}2\pi f}}{1-e^{-\alpha} e^{-\mathrm{i}2\pi f}}+\frac{e^{-\alpha} e^{+\mathrm{i}2\pi f}}{1-e^{-\alpha} e^{+\mathrm{i}2\pi f}}\right] \\
&= \frac{1}{1+e^{-2\alpha}-2e^{-\alpha}\cos(2\pi f)} \\
\Gamma_x(f) &= |X(f)|^2 = \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{-\mathrm{i}2\pi n f}\right|^2 = \left|\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha n} e^{-\mathrm{i}2\pi f}\right|^2 \\
&= \left|\frac{1}{1-e^{-(\alpha+\mathrm{i}2\pi f)}}\right|^2 = \left|\frac{1}{(1-e^{-\alpha}e^{-\mathrm{i}2\pi f})(1-e^{-\alpha}e^{+\mathrm{i}2\pi f})}\right| \\
&= \frac{1}{1+e^{-2\alpha}-2e^{-\alpha}\cos(2\pi f)}\,.
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
E_x &= \int_0^1 \Gamma_x(f)\, df \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\oint \frac{1}{(1-e^{-\alpha}z^{-1})(1-e^{-\alpha}z)}\frac{dz}{z} \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\oint \frac{e^{+\alpha}}{(z-e^{-\alpha})(e^{+\alpha}-z)}\, dz \\
&= \mathrm{Res}\left[\frac{e^{+\alpha}}{(z-e^{-\alpha})(e^{+\alpha}-z)}, z=e^{-\alpha}\right] = \frac{e^{+\alpha}}{e^{+\alpha}-e^{-\alpha}} \\
&= \frac{1}{1-e^{-2\alpha}}
\end{aligned}$$

5. $\int_{-1/4}^{1/4} \Gamma_x(f)\, df$

Exercice 29: transformée en z Calculer la transformée en z des signaux :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ défini par $u_n = 1, n \geq 0$ et $u_n = 0, n < 0$ (échelon).
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ défini par $v_n = n u_n$.

Réponses exercice: 29

1. $U[z] = \frac{1}{1-z^{-1}}$ sur le domaine $|z| > 1$.
2. $V[z] = \sum_{n\geq 0} n z^{-n} = z\sum_{n\geq 0} n z^{-n-1} = -z\frac{d}{dz}\sum_{n\geq 0} z^{-n} = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$ sur le domaine défini par $|z| > 1$.

Signaux aléatoires

Exercice 30: processus flip-flop

1. Soit un processus de Poisson homogène sur $\mathbb{R}$ de paramètre λ : $n(t)$ est défini comme le nombre d'événements survenus entre l'instant 0 et l'instant t. On rappelle que $n(t)$ est défini par les trois propriétés suivantes :

(i) $n(0) = 0$,

(ii) $n(t)$ est un processus à accroissements indépendants,

(iii) pour $t > s$, $\mathbb{P}(n(t) - n(s) = k) = \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)}$ si $k \in \mathbb{N}$ et 0 sinon.

(a) Calculer $\mathbb{E}\{n(t)\}$.

(b) Calculer $\mathbb{E}\{n(t)\big(n(t)-1\big)\}$ et en déduire $\mathbb{E}\{n(t)^2\}$.

(c) $n(t)$ est-il un processus stationnaire ?

2. On définit le processus flip-flop comme le signal aléatoire $x(t)$ donné par $\mathbb{P}(x(0) = 1) = \mathbb{P}(x(0) = -1) = 1/2$ et $x(t) = (-1)^{n(t)} x(0)$.

(a) Calculer $\mathbb{E}\{x(t)\}$ ($t \in \mathbb{R}$).

(b) Calculer $\mathbb{E}\{x(t)x(t-\tau)\}$ ($t \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$).

(c) En déduire que $x(t)$ est un signal aléatoire stationnaire au sens large, centré et de fonction d'auto-corrélation $e^{-2\lambda|\tau|}$.

Réponses exercice: 30

1. (a) Posons $\nu = \lambda t$. Alors $n(t) \sim \mathcal{P}(\nu)$ (loi de Poisson de paramètre ν) et donc :

$$\mathbb{E}\{n(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(n(t) = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\nu^k}{k!}e^{-\nu} = \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\nu}$$

Donc $\mathbb{E}\{n(t)\} = \lambda t$.

(b)

$$\mathbb{E}\{n(t)\big(n(t)-1\big)\} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\mathbb{P}(n(t) = k) = \nu^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\nu^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\nu} = \nu^2 \quad \text{d'où : } \mathbb{E}\{n(t)^2\} = \nu^2 + \nu$$

Donc $\mathbb{E}\{n(t)^2\} = (\lambda t)^2 + \lambda t$.

(c) $n(t)$ n'est pas stationnaire.

2. (a)

$$\mathbb{P}(x(t) = 1) = \mathbb{P}(x(0) = 1)\mathbb{P}(x(t) = 1/x(0) = 1) + \mathbb{P}(x(0) = -1)\mathbb{P}(x(t) = 1/x(0) = -1)$$

Or : $\mathbb{P}(x(0) = 1) = \mathbb{P}(x(0) = -1) = 1/2$ et de plus :

$$\mathbb{P}(x(t) = 1/x(0) = 1) = \mathbb{P}(n(t) - n(0) \text{ est pair}) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\lambda|t|)^{2p}e^{-\lambda|t|}}{(2p)!} = \frac{\text{ch}(\lambda|t|)}{e^{\lambda|t|}}$$

$$\mathbb{P}(x(t) = 1/x(0) = -1) = \mathbb{P}(n(t) - n(0) \text{ est impair}) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\lambda|t|)^{2p+1}e^{-\lambda|t|}}{(2p+1)!} = \frac{\text{sh}(\lambda|t|)}{e^{\lambda|t|}}$$

Il vient alors $\mathbb{P}(x(t) = 1) = 1/2$ et de même $\mathbb{P}(x(t) = -1) = 1/2$, d'où $\mathbb{E}\{x(t) = 0\}$.

(b)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{x(t)x(t-\tau)\} =& 1.[\mathbb{P}(x(t) = 1 \cap x(t-\tau) = 1) + \mathbb{P}(x(t) = -1 \cap x(t-\tau) = -1)] \\ &- 1.[\mathbb{P}(x(t) = 1 \cap x(t-\tau) = -1) + \mathbb{P}(x(t) = -1 \cap x(t-\tau) = 1)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Or : } \mathbb{P}(x(t) = 1 \cap x(t-\tau) = 1) &= \mathbb{P}(x(t) = 1)\mathbb{P}(x(t-\tau) = 1/x(t) = 1) \\ &= \mathbb{P}(x(t) = 1)\mathbb{P}(n(t) - n(t-\tau) \text{ est pair}) = \frac{1}{2}\frac{\text{ch}(\lambda|\tau|)}{e^{\lambda|\tau|}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{De même : } \mathbb{P}(x(t) = -1 \cap x(t-\tau) = -1) &= \frac{1}{2}\frac{\text{ch}(\lambda|\tau|)}{e^{\lambda|\tau|}} \\ \mathbb{P}(x(t) = 1 \cap x(t-\tau) = -1) &= \frac{1}{2}\frac{\text{sh}(\lambda|\tau|)}{e^{\lambda|\tau|}} \\ \mathbb{P}(x(t) = -1 \cap x(t-\tau) = 1) &= \frac{1}{2}\frac{\text{sh}(\lambda|\tau|)}{e^{\lambda|\tau|}}\end{aligned}$$

Il vient finalement $\mathbb{E}\{x(t)x(t-\tau)\} = e^{-2\lambda|\tau|}$.

(c) Résulte de ce qui précède.

Exercice 31: processus de Wiener et Ornstein-Uhlenbeck

1. Soit $w(t)$ un processus de Wiener (ou mouvement brownien). On rappelle que $w(t)$ est défini par les trois propriétés suivantes :

(i) $w(0) = 0$,

(ii) $w(t)$ est un processus à accroissements indépendants,

(iii) pour $t > s$, $w(t) - w(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ (où $\mathcal{N}(0, t-s)$ représente la loi normale de moyenne nulle et variance $t - s$).

(a) Calculer $\mathbb{E}\{w(t)\}$ $(t \in \mathbb{R})$.

(b) Que vaut $\mathbb{E}\{w(t)^2\}$? $w(t)$ est-il un signal stationnaire ?

(c) Pour $t_2 \geq t_1 \geq 0$, montrer que $\mathbb{E}\{w(t_2)w(t_1)\} = \mathbb{E}\{w(t_1)^2\}$ et en déduire $\mathbb{E}\{w(t_2)w(t_1)\}$ d'après ce qui précède.

2. On définit le processus de Ornstein-Uhlenbeck de la façon suivante : $x(t) = e^{-at}w(e^{2at})$ où $w(t)$ est un processus de Wiener et $a > 0$ fixé.

(a) Calculer $\mathbb{E}\{x(t)\}$ $(t \in \mathbb{R})$.

(b) Calculer $\mathbb{E}\{x(t)x(t-\tau)\}$ $(t \in \mathbb{R}, \tau \in \mathbb{R})$.

(c) En déduire que $x(t)$ est un signal aléatoire stationnaire au sens large, centré et de fonction d'auto-corrélation $e^{-a|\tau|}$.

Réponses exercice: 31

1. (a) $w(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$ donc $\mathbb{E}\{w(t)\} = 0$.

(b) Pour la même raison, $\mathbb{E}\{w(t)^2\} = t$ et on constate que $w(t)$ n'est pas stationnaire.

(c) Pour $t_2 \geq t_1 \geq 0$, l'indépendance des accroissements donne $\mathbb{E}\{(w(t_2) - w(t_1))(w(t_1) - w(0))\} = \mathbb{E}\{(w(t_2) - w(t_1))\}\mathbb{E}\{(w(t_1) - w(0))\}$ et cette dernière quantité est nulle compte tenu de la distribution des accroissements. Enfin, comme $w(0) = 0$, il vient : $\mathbb{E}\{(w(t_2)w(t_1)\} = \mathbb{E}\{w(t_1)^2\} = t_1$.

2. (a) $\mathbb{E}\{x(t)\} = \mathbb{E}\{e^{-at}w(e^{2at})\} = 0$ d'après les propriétés de $w(t)$.

(b)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{x(t)x(t-\tau)\} &= \mathbb{E}\{e^{-at}w(e^{2at})e^{-a(t-\tau)}w(e^{2a(t-\tau)})\} \\ &= e^{-2at}e^{a\tau}\mathbb{E}\{w(e^{2at})w(e^{2a(t-\tau)})\} = e^{-2at}e^{a\tau}e^{\min(2at, 2a(t-\tau))} \\ &= e^{-a|\tau|}\end{aligned}$$

(c) Résulte de ce qui précède. Remarquer que le processus de Ornstein-Uhlenbeck a les mêmes statistiques d'ordre deux que le processus flip-flop alors que ce sont deux signaux aléatoires très différents.

Exercice 32: stationnarité, ergodicité (temps continu) On considère le signal aléatoire à temps continu $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$ où A et f_0 sont des constantes réelles strictement positives et ϕ est une variable aléatoire équirépartie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. On désigne par $\mathbb{E}\{.\}$ l'espérance mathématique et par $< . >$ la moyenne temporelle d'une expression quelconque.

1. Calculer $\mathbb{E}\{x(t)\}$ et $< x(t) >$.

2. Calculer $\mathbb{E}\{x(t)x(t-\tau)\}$ et $< x(t)x(t-\tau) >$. Conclusion.

3. Quelle est la densité spectrale de puissance $S_x(f)$ de $x(t)$? Quelle est la puissance du signal ?

Réponses exercice: 32 Cf. poly.

Exercice 33: stationnarité, ergodicité (temps continu) On désigne par $\mathbb{E}\{.\}$ l'espérance mathématique et par $< . >$ la moyenne temporelle d'une expression quelconque (càd que par définition : $< z(t) > \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} z(t)\,dt$).

Soit le signal aléatoire à temps continu :

$$x(t) = A_1 e^{i2\pi f_1 t} + A_2 e^{i2\pi f_2 t}$$

où f_1, f_2 sont des constantes réelles strictement positives et A_1, A_2 sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{C}$. A_1 et A_2 sont supposées centrées ($\mathbb{E}\{A_1\} = \mathbb{E}\{A_2\} = 0$).

1. Calculer $\mathbb{E}\{x(t)\}$ et $< x(t) >$. Conclusion.

2. (a) On suppose de plus que A_1 et A_2 sont décorrélées et telles que $|A_1| = |A_2| = 1$. Calculer $\mathbb{E}\{x(t)x(t-\tau)^*\}$ et $< x(t)x(t-\tau)^* >$. Conclusion.

(b) On suppose ici que A_1 et A_2 sont corrélées (et donc non indépendantes). Calculer à nouveau $\mathbb{E}\{x(t)x(t-\tau)^*\}$ et montrer qu'il apparaît des termes supplémentaires. Le signal est-il stationnaire dans ce cas ?

3. Dans le cas où le signal est stationnaire au sens large, calculer la densité spectrale de puissance $S_x(f)$ de $x(t)$? Quelle est la puissance du signal ?

Réponses exercice: 33

1. $\mathbb{E}\{x(t)\} =< x(t) >= 0$. Le signal est stationnaire et ergodique au 1^{er} ordre.

2. (a) $\mathbb{E}\{x(t)x(t-\tau)^*\} =< x(t)x(t-\tau)^* >= e^{i2\pi f_1 \tau} + e^{i2\pi f_2 \tau}$. Le signal est stationnaire et ergodique au 2^{nd} ordre (remarquer la nécessité de $|A_1| = |A_2| = 1$ pour l'ergodicité.

(b) Si A_1 et A_2 sont corrélées, non stationnarité (sauf pour $f_1 = f_2$) en raison des termes croisés supplémentaires (qui dépendent de t :

$$\mathbb{E}\{A_1 A_2^*\} e^{i2\pi[(f_1-f_2)t+f_2\tau]} + \mathbb{E}\{A_1^* A_2\} e^{i2\pi[(f_2-f_1)t+f_1\tau]}$$

3. $S_x(f) = \delta(f-f_1) + \delta(f-f_2)$; $P_x = R_x(0) = 2$.

Exercice 34: filtrage, bruit blanc On considère le signal à temps continu $x(t) = a\cos(2\pi f_0 t + \phi) + b(t)$ où a et f_0 sont des constantes réelles, ϕ est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ et $b(t)$ est un bruit blanc (centré) dont la densité spectrale est notée $\frac{N_0}{2}$. Les deux processus $a\cos(2\pi f_0 t + \phi)$ et $b(t)$ sont supposés indépendants.

1. Montrer que le signal $x(t)$ est stationnaire au sens large et calculer sa fonction d'autocorrélation $\gamma_x(\tau), \tau \in \mathbb{R}$.

2. Calculer $\Gamma_x(f)$ la densité spectrale de puissance du signal $x(t)$.

3. Le signal $x(t)$ est appliqué en entrée d'un filtre dont la réponse fréquentielle vaut :

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f \in [f_0 - B/2, f_0 + B/2] \cup [-f_0 - B/2, -f_0 + B/2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer la puissance du signal $y(t)$ en sortie du filtre.

Réponses exercice: 34

1. En utilisant l'indépendance des termes croisés et le fait que le bruit est centré, il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{x(t)x(t-\tau)\} &= \mathbb{E}\{a^2\cos(2\pi f_0 t + \phi)\cos(2\pi f_0(t-\tau) + \phi)\} + \mathbb{E}\{b(t)b(t-\tau)\} \\ &= \mathbb{E}\{\frac{a^2}{2}\big(\cos(4\pi f_0(t-\tau/2) + 2\phi) + \cos(2\pi f_0\tau)\big)\} + \mathbb{E}\{b(t)b(t-\tau)\}\end{aligned}$$

ϕ étant uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$ et $b(t)$ étant blanc, le signal est stationnaire de fonction d'autocorrélation :

$$\gamma_x(\tau) = \frac{a^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau) + \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

2. La densité spectrale de puissance est la transformée de Fourier de l'expression précédente :

$$\Gamma_x(f) = \frac{a^2}{4}\left(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right) + \frac{N_0}{2}$$

3. En notant $\Gamma_y(f)$ la densité spectrale de $y(t)$, la puissance s'écrit :

$$P_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_y(f)\, df = \int_{-f_0-B/2}^{-f_0+B/2} \Gamma_x(f)\, df + \int_{f_0-B/2}^{f_0+B/2} \Gamma_x(f)\, df = \frac{a^2}{2} + BN_0$$

Exercice 35: filtrage d'un signal aléatoire On considère un signal aléatoire à temps continu $x(t)$ que l'on suppose réel, centré et stationnaire au sens large. On suppose qu'au cours d'une transmission, un récepteur reçoit le signal $y(t)$ donné par :

$$y(t) = x(t) + \rho x(t - \theta)$$

où ρ et θ sont des constantes réelles. On note $\gamma_x(\tau) \triangleq \mathbb{E}\{x(t)x(t-\tau)\}$ la fonction d'autocorrélation de $x(t)$.

1. Rappeler la définition de la stationnarité au sens large. Calculer $\mathbb{E}\{y(t)\}$ puis la fonction d'autocorrélation de $y(t)$ (notée $\gamma_y(\tau)$) en fonction de celle de $x(t)$. Le signal $y(t)$ est-il stationnaire au sens large ?

2. Exprimer la puissance $\mathbb{E}\{y(t)^2\}$ en fonction de $\gamma_x(0)$ et $\gamma_x(\theta)$.

3. Calculer la densité spectrale de $y(t)$ (notée $\Gamma_y(f)$) en fonction de celle de $x(t)$ (notée $\Gamma_x(f)$).

4. Justifier que $y(t)$ est obtenu par filtrage de $x(t)$. Trouver la réponse en fréquence $H(f)$ du filtre et retrouver l'expression précédente de $\Gamma_y(f)$ à l'aide de la formule des interférences.

5. On suppose que $x(t)$ est un signal bande étroite autour de la fréquence f_0. $y(t)$ est-il également bande étroite ? Pourquoi ?

6. On suppose que $x(t)$ s'écrit $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ où φ est une variable aléatoire équirépartie sur $[0, 2\pi]$. Justifier la stationnarité de $x(t)$ dans ce cas.

Réponses exercice: 35

1. $\mathbb{E}\{y(t)\} = 0$. $\gamma_y(\tau) \triangleq \mathbb{E}\{y(t)y(t-\tau)\} = (1+\rho^2)\gamma_x(\tau) + \rho(\gamma_x(\tau+\theta) + \gamma_x(\tau-\theta))$

2. $\mathbb{E}\{y(t)^2\} = \gamma_y(0) = (1+\rho^2)\gamma_x(0) + 2\rho\gamma_x(\theta)$

3. $\Gamma_y(f) = [(1+\rho^2) + 2\rho\cos(2\pi\theta f)]\gamma_x(f)$

4. L'équation donnant $y(t)$ en fonction de $x(t)$ est un exemple classique de système linéaire et invariant dans le temps : c'est donc une opération de filtrage et la réponse en fréquence est : $H(f) = 1 + \rho e^{-\mathrm{i}2\pi\theta f}$. La relation $\Gamma_y(f) = |H(f)|^2\Gamma_x(f)$ redonne bien l'expression de la question précédente.

5. $y(t)$ est aussi bande étroite : le support du spectre de $y(t)$ est en effet contenu dans celui de $x(t)$ d'après les relations des deux questions précédentes.

6. Voir poly.

Exercice 36: modulation d'un signal aléatoire bande limitée On considère le signal suivant à temps continu :

$$x(t) = a(t)e^{\mathrm{i}2\pi f_0 t}$$

où f_0 est une constante et $a(t)$ est un signal à valeurs complexes.

1. On suppose que $a(t)$ est un signal déterministe dont la transformée de Fourier existe et est notée $A(f)$.

(a) $x(t)$ est-il un signal déterministe ou aléatoire ?

(b) Exprimer $X(f)$, la transformée de Fourier de $x(t)$ en fonction de $A(f)$.

(c) Si $a(t)$ est à bande limitée $[-B, B]$, quelle est la bande occupée par $x(t)$?

2. On suppose maintenant que $a(t)$ est un signal aléatoire centré stationnaire au sens large dont la fonction d'autocorrélation est notée $\gamma_a(\tau) \triangleq \mathbb{E}\{a(t)a^*(t-\tau)\}$.

(a) Calculer la fonction d'autocorrélation $\gamma_x(\tau)$ de $x(t)$ et justifier la stationnarité au sens large de $x(t)$.

(b) Calculer $\Gamma_x(f)$, la densité spectrale de puissance de $x(t)$ en fonction de $\Gamma_a(f)$, densité spectrale de puissance de $a(t)$. Si $a(t)$ est à bande limitée $[-B, B]$ (càd si $\Gamma_a(f)$ est nul en dehors de cette bande), que peut-on dire de $x(t)$?

Réponses exercice: 36

1. (a) $x(t)$ est déterministe.

(b) $X(f) = A(f - f_0)$ (propriété de modulation de la transformée de Fourier)

(c) Bande occupée par $x(t)$: $[f_0 - B, f_0 + B]$.

2. (a) $\gamma_x(\tau) = \gamma_a(\tau)e^{i2\pi f_0 \tau}$.

(b) $\Gamma_x(f) = \Gamma_a(f - f_0)$. Si $a(t)$ à bande limitée $[-B, B]$, la bande occupée par $x(t)$ est $[f_0 - B, f_0 + B]$.

Exercice 37: filtrage, bruit blanc

1. On considère le système qui à un signal $x(t)$ à temps continu associe le signal $y(t)$ défini par :

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(u)\, du$$

(a) Montrer que ce système correspond à un filtre (au sens : système linéaire et invariant). Quelle est sa réponse impulsionnelle $h(t)$?

(b) Le filtre est-il stable ? causal ?

(c) Quelle est la réponse en fréquence $H(f)$ du filtre ?

2. Le filtre précédent est attaqué en entrée par le signal aléatoire à temps continu $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi) + b(t)$ où A et f_0 sont des constantes, ϕ est une variable aléatoire répartie uniformément sur $[0, 2\pi]$, $b(t)$ est un bruit blanc de densité spectrale $\Gamma_b(f) = \frac{N_0}{2}$. Les processus $A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$ et $b(t)$ sont de plus indépendants.

(a) Calculer la densité spectrale de puissance $\Gamma_x(f)$ du signal $x(t)$ en entrée.

(b) En déduire la densité spectrale de puissance $\Gamma_y(f)$ du signal $y(t)$ en sortie.

3. Calculer la puissance du signal $y(t)$ à partir de sa densité spectrale (indication : on pourra utiliser la formule de Parseval pour l'une des intégrales).

4. On donne la transformée de Fourier inverse $(\text{sinc}(\pi f T))^2 \xrightarrow{\text{TF}^{-1}} \frac{1}{T}\Lambda_{2T}(t)$ où $\Lambda_{2T}(t) = \begin{cases} 1 - |t|/T & \text{si } |t| \leq T, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

(a) En déduire la fonction d'auto-corrélation $\gamma_y(\tau)$ de $y(t)$.

(b) Vérifier que l'on retrouve la puissance du signal $y(t)$ trouvée à la question 3.

Réponses exercice: 37

1. (a) $h(t) = \begin{cases} 1/T & \text{si } t \in [0, T], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.

(b) Stable et causal.

(c) $H(f) = e^{-\mathrm{i}\pi f T}\mathrm{sinc}(\pi f T)$.

2. (a) L'autocorrélation de $x(t)$ vaut $\gamma_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau) + \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$ et la densité spectrale de puissance vaut donc $\Gamma_x(f) = \frac{A^2}{4}\Big(\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)\Big) + \frac{N_0}{2}$

(b)

$$\begin{aligned}\Gamma_y(f) = |H(f)|^2\Gamma_x(f) &= \mathrm{sinc}^2(\pi f T)\left[\frac{A^2}{4}\Big(\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)\Big) + \frac{N_0}{2}\right] \\ &= \frac{A^2}{4}\mathrm{sinc}^2(\pi f_0 T)\delta(f+f_0) + \frac{A^2}{4}\mathrm{sinc}^2(\pi f_0 T)\delta(f-f_0) + \mathrm{sinc}^2(\pi f T)\frac{N_0}{2}\end{aligned}$$

3. En remarquant à l'aide de la relation de Parseval que $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{sinc}^2(\pi f T)\ df = 1/T$, on obtient la puissance $P_y = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_y(f)\ df = \frac{N_0}{2T} + \frac{A^2}{2}\mathrm{sinc}^2(\pi f_0 T)$

4. (a) $\gamma_y(t) = \frac{A^2}{2}\mathrm{sinc}^2(\pi f_0 T)\cos(2\pi f_0 t) + \frac{N_0}{2T}\Lambda_{2T}(t)$

(b) $P_y = \gamma_y(0)$.

Exercice 38: filtre adapté (temps continu) On considère un signal déterministe $s(t)$ qui modélise une impulsion (par exemple radar/sonar). Cette impulsion est réfléchie sur une cible et on suppose que le signal reçu en retour (par exemple sur l'antenne de réception) s'écrit :

$$x(t) = s(t-\tau) + b(t)$$

où $\tau \geq 0$ représente un retard et $b(t)$ est un bruit blanc centré. Un traitement est appliqué au signal $x(t)$ en réception afin de maximiser le critère de "rapport signal sur bruit". Plus précisément, on applique à $x(t)$ un filtre dont la réponse impulsionnelle est notée $h(t)$ et la réponse en fréquence est notée $H(f)$.

1. Rappeler comment s'exprime l'énergie E_s du signal $s(t)$?

2. Si $\widetilde{x}(t)$ est la sortie du filtre $h(t)$ lorsque $x(t)$ est en entrée, justifier en deux mots que l'on puisse écrire $\widetilde{x}(t) = \widetilde{s}(t-\tau) + \widetilde{b}(t)$ où $\widetilde{s}(t)$ et $\widetilde{b}(t)$ sont les sorties du même filtre $h(t)$ avec respectivement $s(t)$ et $b(t)$ en entrée.

3. Exprimer $\widetilde{s}(t)$ en fonction de $H(f)$ et $S(f)$ et en déduire $\widetilde{s}(0) = \int H(f)S(f)\ df$.

4. On note $N_0/2$ la densité spectrale de puissance de $b(t)$.

(a) Que vaut la densité spectrale de puissance de $\widetilde{b}(t)$ (notée $\Gamma_{\widetilde{b}}(f)$) ?

(b) En déduire la puissance de $\widetilde{b}(t)$. Que vaut $\mathbb{E}\{|\widetilde{b}(\tau)|^2\}$?

5. On désire maximiser le critère "rapport signal sur bruit" en sortie du filtre à l'instant τ. Ce critère est défini par :

$$(RSB)_\tau = \frac{|\widetilde{s}(0)|^2}{\mathbb{E}\{|\widetilde{b}(\tau)|^2\}}$$

(a) Exprimer $(RSB)_\tau$ en fonction de $H(f)$, $S(f)$ et N_0.

(b) Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au numérateur pour montrer que $(RSB)_\tau \leq \frac{2E_s}{N_0}$.

(c) Montrer que $(RSB)_\tau$ est maximal lorsque $H(f) = KS(f)^*$, où K est une constante que l'on peut choisir librement.

6. Nous supposons dans la suite que $H(f) = S(f)^*$. Quelle est la réponse impulsionnelle $h(t)$? Le filtre correspondant est appelé *filtre adapté*.

7. On suppose maintenant que le bruit est identiquement nul. Montrer que le calcul de la sortie du filtre adapté correspond à l'auto-corrélation du signal $s(t)$. Commentaire éventuel ?

Réponses exercice: 38

1. Voir cours.

2. Linéarité et invariance dans le temps.

3. $\widetilde{s}(t) = \int H(f)S(f)e^{+\mathrm{i}2\pi ft}\, df$ et $\widetilde{s}(0) = \int H(f)S(f)\, df$.

4. (a) $\Gamma_{\widetilde{b}}(f) = \frac{N_0}{2}|H(f)|^2$.
(b) Puissance : $\mathbb{E}\{|\widetilde{b}(\tau)|^2\} = \int \frac{N_0}{2}|H(f)|^2\, df$.

5. (a) facile.
(b) facile.
(c) cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

6. $h(t) = s(-t)^*$.

7. Si $b(t) = 0$, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\widetilde{x}(t) = h(t) \star x(t) &= \int h(\theta)x(t-\theta)\, dt = \int s(-\theta)^* s(t-\theta-\tau)\, d\theta \\ &= \int s(\theta)^* s(t-\tau+\theta)\, d\theta = \gamma_s(t-\tau)\end{aligned}$$

Exercice 39: stationnarité, ergodicité, bruit blanc (temps discret)

1. Soit le signal aléatoire (complexe) à temps discret $x_n = e^{\mathrm{i}(\omega n+\phi)}$ où $\omega \in \mathbb{R}$ et ϕ est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$.

(a) Calculer $\mathbb{E}\{x_n\}$ et $\mathbb{E}\{x_n x_{n-k}^*\}$. Que dire de la stationnarité ? Que vaut l'auto-corrélation $\gamma_x(k)$ du signal x_n ?

(b) Calculer :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x_n \quad \text{et :} \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x_n x_{n-k}^*$$

Que peut-on dire concernant l'ergodicité ?

2. On considère maintenant le signal $y_n = e^{\mathrm{i}(\omega_1 n+\phi_1)} + e^{\mathrm{i}(\omega_2 n+\phi_2)}$ où ω_1, ω_2 sont fixés dans $\mathbb{R}$ et ϕ_1, ϕ_2 sont des variables aléatoires indépendantes et uniformes sur $[0, 2\pi]$.

(a) y_n est-il stationnaire ? Calculer $\mathbb{E}\{y_n\}$ et $\gamma_y(k) \triangleq \mathbb{E}\{y_n y_{n-k}^*\}$.

(b) Calculer la puissance de y_n.

3. Soit le signal $z_n = y_n + e_n$ où e_n est un bruit blanc centré, indépendant de y_n et de puissance σ_e^2. Calculer la puissance, la moyenne et l'autocorrélation de z_n.

Réponses exercice: 39

1. (a) $\mathbb{E}\{x_n\} = 0$; $\mathbb{E}\{x_n x_{n-k}^*\} = e^{\mathrm{i}\omega k}$. $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire au sens large et $\gamma_x(k) = e^{\mathrm{i}\omega k}$.
(b)

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \neq 2\pi\ell, \ell \in \mathbb{Z} \\ e^{\mathrm{i}\phi} & \text{si } \omega \neq 2\pi\ell, \ell \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{et :} \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x_n x_{n-k}^* = e^{\mathrm{i}\omega k}$$

Signal ergodique au sens large pour $\omega \neq 2\pi\ell, \ell \in \mathbb{Z}$.

2. (a) y_n est stationnaire, $\mathbb{E}\{y_n\} = 0$, $\gamma_y(k) = e^{\mathrm{i}\omega_1 k} + e^{\mathrm{i}\omega_2 k}$.
(b) $P_y = 2$.

3. $P_z = 2 + \sigma_e^2$, $\mathbb{E}\{z_n\} = 0$; $\mathbb{E}\{z_n z_{n-k}^*\} = e^{\mathrm{i}\omega_1 k} + e^{\mathrm{i}\omega_2 k} + \sigma_e^2 \delta_k$.

Exercice 40: filtrage d'ordre un d'une suite aléatoire

1. On considère un filtre à temps discret causal défini par la relation suivante entre son entrée $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et sa sortie $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$:

$$\forall n \qquad y_n = x_n + \frac{1}{2}y_{n-1}$$

(a) Déterminer la fonction de transfert en z du filtre causal ci-dessus, que l'on notera $H[z]$.

(b) Préciser et justifier le domaine de convergence associé à $H[z]$. Indiquer si le filtre est stable en justifiant.

(c) Calculer la réponse en fréquence $H(f)$ du filtre.

(d) Calculer la réponse impulsionnelle $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

2. On suppose qu'en entrée du filtre précédent, $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un signal aléatoire, centré, stationnaire au sens large et de fonction d'auto-corrélation :

$$\gamma_x(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, \\ \frac{1}{2} & \text{si } k = 1 \text{ ou } k = -1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Calculer la densité spectrale $\Gamma_x(f)$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

(b) Calculer la densité spectrale $\Gamma_y(f)$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

(c) Rappeler la définition et donner la valeur de la puissance de $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

(d) Exprimer la puissance de $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en fonction de la densité spectrale de puissance, puis effectuer le calcul (indication : on pourra interpréter l'intégrale comme une intégrale de la variable complexe z le long du cercle unité).

Réponses exercice: 40

1. (a) $H[z] = \frac{1}{1-\frac{z^{-1}}{2}}$.

(b) Domaine de convergence $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > 1/2\}$ (correspondant au filtre causal). Le filtre est stable.

(c) $H(f) = H[e^{i2\pi f}] = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-i2\pi f}}$.

(d) $h_n = 0$ si $n < 0$ et $h_n = \frac{1}{2^n}$ si $n \geq 0$.

2. (a) $\Gamma_x(f) = 1 + \cos(2\pi f)$

(b) $\Gamma_y(f) = |H(f)|^2\Gamma_x(f) = \frac{1+\cos(2\pi f)}{(1-\frac{1}{2}e^{-i2\pi f})(1-\frac{1}{2}e^{+i2\pi f})} = \frac{1+\cos(2\pi f)}{5/4-\cos(2\pi f)}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

(c) $P_x = \mathbb{E}\{|x_n|^2\} = \gamma_x(0) = 1$

(d) En notant $\oint$ l'intégrale le long du cercle unité et $\Gamma_x[z]$, $\Gamma_y[z]$ les transformées en z respectives des autocorrélations $\gamma_x(k)$, $\gamma_y(k)$:

$$\begin{aligned}
P_y &= \int_0^1 \Gamma_y(f)\, df = \oint \Gamma_y[z]\, \frac{dz}{i2\pi z} \\
&= \oint H[z]H[z^{-1}]\Gamma_x[z]\, \frac{dz}{i2\pi z} \\
&= \frac{1}{i2\pi}\oint \frac{1+\frac{z+z^{-1}}{2}}{z(1-\frac{z^{-1}}{2})(1-\frac{z}{2})}\, dz = \frac{1}{i2\pi}\oint \frac{-(z+1)^2}{z(z-\frac{1}{2})(z-2)}\, dz \\
&= \text{Res}\left[\frac{-(z+1)^2}{z(z-\frac{1}{2})(z-2)}, z=0\right] + \text{Res}\left[\frac{-(z+1)^2}{z(z-\frac{1}{2})(z-2)}, z=1/2\right] \\
&= -1+3 = 2
\end{aligned}$$

Exercice 41: filtrage à temps discret d'un bruit blanc On considère un filtre à temps discret causal défini par la relation suivante entre son entrée $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et sa sortie $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$:

$$\forall n \qquad y_n = x_n + \frac{1}{2}y_{n-1}$$

1. Déterminer la fonction de transfert en z du filtre causal ci-dessus, que l'on notera $H[z]$.

2. Préciser et justifier le domaine de convergence associé à $H[z]$. Indiquer si le filtre est stable en justifiant.

3. Calculer la réponse en fréquence $H(f)$ du filtre.

4. On suppose qu'en entrée du filtre précédent, $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc centré de puissance σ_x^2. Préciser ce que vaut la densité spectrale $\Gamma_x(f)$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et calculer la densité spectrale $\Gamma_y(f)$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Réponses exercice: 41

1. $H[z] = \frac{1}{1-\frac{z^{-1}}{2}}$.

2. Le domaine de convergence est $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > 1/2\} \cup \{\infty\}$ (filtre causal, $\mathcal{D}$ est le complémentaire d'un disque). Le filtre est stable car $\mathcal{D}$ contient le cercle unité.

3. $H(f) = H[e^{i2\pi f}] = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-i2\pi f}}$

4. $\Gamma_x(f) = \sigma_x^2$ et $\Gamma_y(f) = |H(f)|^2\Gamma_x(f) = \frac{\sigma_x^2}{(1-\frac{1}{2}e^{-i2\pi f})(1-\frac{1}{2}e^{+i2\pi f})} = \frac{\sigma_x^2}{5/4-\cos(2\pi f)}$.

Exercice 42: filtrage d'un signal aléatoire (temps discret) Soit un signal aléatoire à temps discret $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ réel, centré et tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{E}\{x_n x_{n-k}\} = \delta_k$ (où par définition $\delta_k = 0$ si $k \neq 0$ et $\delta_0 = 1$).

1. Le signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est-il stationnaire au sens large ? Si oui, quelle est sa fonction d'autocorrélation ?

2. On filtre le signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par un filtre dont la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h_n = \begin{cases} a^n & \text{si } n \geq 0, \\ 0 & \text{si } n < 0, \end{cases}$$

où a est réel, $|a| < 1$. Donner l'expression de la sortie $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ du filtre et en déduire $\mathbb{E}\{y_n\}$.

3. Calculer la fonction d'autocorrélation $\gamma_y(k), k \in \mathbb{Z}$ du signal $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ (on pourra faire le calcul pour $k \geq 0$ et utiliser la symétrie de la fonction d'autocorrélation).

4. Calculer la densité spectrale de $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dont on rappelle la définition dans le cas présent : $\Gamma_y(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_y(k)e^{-i2\pi kf}$.

5. Vérifier que la densité spectrale obtenue précédemment correspond au résultat donné par la formule liant les densités spectrales en entrée et en sortie d'un filtre.

Réponses exercice: 42

1. $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire au sens large de fonction d'autocorrélation $\gamma_x(k) = \delta_k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $y_n = \sum_k a^k x_{n-k}$ et donc $\mathbb{E}\{y_n\} = \sum_k a^k \mathbb{E}\{x_{n-k}\} = 0$.

3. Pour $k \geq 0$ fixé,

$$\begin{aligned}\gamma_y(k) &= \mathbb{E}\{y_n y_{n-k}\} = \mathbb{E}\{\sum_{p=0}^{\infty} a^p x_{n-p} \sum_{q=0}^{\infty} a^q x_{n-k-q}\} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} a^{p+q}\mathbb{E}\{x(n-p)x(n-k-q)\} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} a^{p+q}\delta_{k+q-p} = \sum_{q=0}^{\infty} a^{k+2q} = \frac{a^k}{1-a^2}\end{aligned}$$

et par symétrie, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\gamma_y(k) = \frac{a^{|k|}}{1-a^2}$

4.

$$\begin{aligned}\Gamma_y(f) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_y(k)e^{-\mathrm{i}2\pi kf} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{a^{|k|}}{1-a^2}e^{-\mathrm{i}2\pi kf} = \frac{1}{1-a^2}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty} a^k e^{-\mathrm{i}2\pi kf} + a^k e^{+\mathrm{i}2\pi kf}\right] \\ &= \frac{1}{1-a^2}\left[1+\frac{ae^{-\mathrm{i}2\pi f}}{1-ae^{-\mathrm{i}2\pi f}} + \frac{ae^{+\mathrm{i}2\pi f}}{1-ae^{+\mathrm{i}2\pi f}}\right] \\ &= \frac{1}{1-2a\cos(2\pi f)+a^2}\end{aligned}$$

5. La densité spectrale en sortie est donnée par la relation : $\Gamma_y(f) = |H(f)|^2\Gamma_x(f)$ où $\Gamma_x(f)$ est la densité spectrale en entrée et $H(f)$ la réponse en fréquence du filtre.

$$H(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k e^{-\mathrm{i}2\pi kf} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-\mathrm{i}2\pi kf} = \frac{1}{1-ae^{-\mathrm{i}2\pi f}}$$

$$\Gamma_x(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_x(k)e^{-\mathrm{i}2\pi kf} = 1$$

On retrouve alors bien l'expression précédente.

Exercice 43: filtrage d'un signal aléatoire (temps discret) Soit un signal aléatoire à temps discret $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ réel, centré et tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{E}\{x_n x_{n-k}\} = \delta_k$ (où par définition $\delta_k = 0$ si $k \neq 0$ et $\delta_0 = 1$).

1. Le signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est-il stationnaire au sens large ? Si oui, quelle est sa fonction d'autocorrélation ?

2. On filtre le signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par un filtre dont la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h_n = \begin{cases} a^n & \text{si } n \geq 0, \\ 0 & \text{si } n < 0, \end{cases}$$

où a est réel, $|a| < 1$. Donner l'expression de la sortie $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ du filtre.

3. Calculer $H[z]$, la fonction de transfert en z du filtre précédent et préciser son domaine de convergence.

4. Calculer la densité spectrale $\Gamma_y(f)$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Réponses exercice: 43

1. $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire au sens large de fonction d'autocorrélation $\gamma_x(k) = \delta_k$.

2. $y_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} h_k x_{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x_{n-k}$.

3. $H[z] = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1-az^{-1}}$ sur le domaine défini par $|z| > |a|$.

4. $\Gamma_y(f) = \left|\frac{1}{1-ae^{-\mathrm{i}2\pi f}}\right|^2$.

Exercice 44: filtrage d'un signal aléatoire (temps discret) Soit le filtre à temps discret défini par la relation de récurrence suivante entre le signal d'entrée $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et le signal de sortie $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad y_n = ay_{n-1} + x_n \tag{11}$$

où a est réel, $|a| < 1$.

1. Calculer la transformée en z (notée $H[z]$) du filtre en question. Compte tenu de la causalité imposée par l'équation (11), quel est le domaine de convergence de $H[z]$? Que peut-on en déduire concernant la stabilité du filtre ?

2. Calculer la réponse impulsionnelle $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ du filtre causal $H[z]$.

Le filtre est attaqué en entrée par un signal aléatoire à temps discret $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ réel, centré. De plus, sa densité spectrale vaut : $\Gamma_x(f) = 1$.
Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $\gamma_x(k) = \mathbb{E}\{x_n x_{n-k}\}$ la fonction d'autocorrélation de $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et on rappelle que la densité spectrale de $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est définie par : $\Gamma_x(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_x(k) e^{-\mathrm{i}2\pi kf}$.

3. Quelle est la réponse fréquentielle $H(f)$ du filtre $H[z]$? Calculer la densité spectrale $\Gamma_y(f)$ du signal $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en sortie du filtre (il est inutile de passer par le calcul de l'autocorrélation).

4. Que vaut la fonction d'autocorrélation du signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$? Calculer $\gamma_y(k), k \in \mathbb{Z}$ (on pourra utiliser le fait que les fonctions d'autocorrélation en entrée et sortie du filtre sont liées par la convolution $\gamma_y(k) = \gamma_h(k) \star \gamma_x(k)$ où $\gamma_h(k)$ est l'autocorrélation en énergie de la réponse impulsionnelle du filtre).

5. Calculer la réponse impulsionnelle du filtre *anti-causal* admettant $H[z]$ comme transformée en z sur un domaine de convergence à préciser.

Réponses exercice: 44

1. $H[z] = \frac{1}{1-az^{-1}}$ sur le domaine de convergence $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > |a|\}$. Le filtre est donc stable (car $|a| < 1$).

2. Un développement de $H[z]$ en série sur le domaine de convergence donne immédiatement :

$$h_n = \begin{cases} a^n & \text{si } n \geq 0, \\ 0 & \text{si } n < 0, \end{cases}$$

3. La réponse fréquentielle est donnée par $H(f) = H[e^{\mathrm{i}2\pi f}] = \frac{1}{1-ae^{-\mathrm{i}2\pi f}}$. La densité spectrale en sortie est alors donnée par :

$$\Gamma_y(f) = |H(f)|^2 \Gamma_x(f) = \frac{1}{1 + a^2 - 2a\cos(2\pi f)}$$

4. La fonction d'autocorrélation de $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ correspond aux coefficients du développement en série de Fourier de $\Gamma_x(f)$ et on a donc immédiatement : $\gamma_x(k) = \delta_k$ (impulsion unité égale à 1 si $k = 0$ et 0 sinon). Il vient alors :$\gamma_y(k) = \gamma_h(k) \star \gamma_x(k) = \gamma_h(k)$ et pour $k \geq 0$ on peut faire le calcul :

$$\gamma_h(k) = \sum_n h_n h_{n-k} = \sum_{n\geq k} a^n a^{n-k} = a^k \sum_{n\geq 0} a^{2n} = \frac{a^k}{1-a^2}$$

En utilisant la symétrie, on conclut finalement : $\gamma_y(k) = \frac{a^{|k|}}{1-a^2}$.

5. Le filtre *anti-causal* admettant $H[z]$ comme transformée en z est celui correspondant au domaine de convergence $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < |a|\}$ de $H[z]$. Or pour tout z dans ce domaine, $\frac{1}{1-az^{-1}} = -\sum_{n\leq -1} a^n z^{-n}$ et la réponse impulsionnelle du filtre anti-causal de transformée en z $H[z]$ est donc :

$$\tilde{h}_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 0, \\ -a^n & \text{si } n < 0, \end{cases}$$

Exercice 45: signal aléatoire sinusoidal bruité, filtrage On considère le signal à temps discret $x_n = a\cos(2\pi f_0 n) + b_n$ où $a > 0$ et $f_0 \in]0, 1/2[$ sont des constantes, ϕ est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ et b_n est un bruit blanc (centré) de puissance $\mathbb{E}\{b_n^2\} = \sigma^2$. Les deux processus $a\cos(2\pi f_0 n + \phi)$ et b_n sont supposés indépendants.

1. Montrer que le signal x_n est stationnaire au sens large.

2. Vérifier que pour $f \in [-1/2, 1/2]$, la densité spectrale de puissance de x_n s'écrit :

$$\Gamma_x(f) = \frac{a^2}{4}\left(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right) + \sigma^2 \quad \text{sur l'intervalle [-1/2,1/2].}$$

Pour cela, on rappellera l'expression de l'autocorrélation $\gamma_x(k)$ en fonction de la densité spectrale de puissance $\Gamma_x(f)$. (On manipulera la masse de Dirac $\delta(.)$ selon les règles «usuelles» et sans aucune justification demandée.)

3. Pourriez-vous donner, en justifiant, l'expression de $\Gamma_x(f)$ sur l'intervalle $[0, 1]$?

4. Le signal x_n est appliqué en entrée d'un filtre dont la réponse en fréquence vaut :

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f \in [-\alpha, \alpha] \qquad (\text{avec } 0 < f_0 < \alpha < 1/2), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer la puissance du signal y_n en sortie du filtre.

Réponses exercice: 45

1. En utilisant l'indépendance des termes croisés et le fait que le bruit est centré, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{x_n x_{n-k}\} &= \mathbb{E}\{a^2 \cos(2\pi f_0 n + \phi)\cos(2\pi f_0(n-k) + \phi)\} + \mathbb{E}\{b_n b_{n-k}\} \\ &= \mathbb{E}\{\frac{a^2}{2}\Big(\cos(2\pi f_0(2n-k) + 2\phi) + \cos(2\pi f_0 k)\Big)\} + \mathbb{E}\{b_n b_{n-k}\} \end{aligned}$$

ϕ étant uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$ et b_n étant blanc, le signal est stationnaire de fonction d'autocorrélation :

$$\gamma_x(k) = \frac{a^2}{2}\cos(2\pi f_0 k) + \sigma^2 \delta_k$$

2. $\gamma_x(k)$ et $\Gamma_x(f)$ sont liées par transformée de Fourier (temps discret) et on a :

$$\gamma_x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_x(f))e^{+i2\pi kf}\, df$$

La densité spectrale de puissance est la transformée de Fourier de l'expression précédente :

$$\Gamma_x(f) = \frac{a^2}{4}\left(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right) + \sigma^2$$

3. Compte tenu de la 1-périodicité de $\Gamma_x(f)$,

$$\Gamma_x(f) = \frac{a^2}{4}\left(\delta(f - f_0) + \delta(f - 1 + f_0)\right) + \sigma^2 \quad \text{sur l'intervalle } [0, 1].$$

4. La densité spectrale de y_n vaut $\Gamma_y(f) = |H(f)|^2 \Gamma_x(f)$ et la puissance de y_n s'en déduit :

$$P_y = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_y(f)\, df = \int_{-\alpha}^{\alpha} \Gamma_x(f)\, df = \frac{a^2}{2} + 2\alpha\sigma^2$$

Exercice 46: effacement d'une série harmonique Dans tout l'exercice, n désigne un entier $n \in \mathbb{Z}$. Pour $p \in \{1, \ldots, M\}$, soient f_p des raies (càd des fréquences fixées) dans $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et u_p des variables aléatoires centrées et décorrélées. On définit le signal aléatoire :

$$x_n = \sum_{p=1}^{M} u_p e^{i2\pi n f_p} \tag{12}$$

1. Justifier que x_n est un signal aléatoire stationnaire au sens large et, pour $k \in \mathbb{Z}$, calculer son auto-corrélation $\gamma_x(k)$.

2. On admet que, pour x_n, on peut écrire symboliquement une densité spectrale de puissance $\Gamma_x(f)$ sous la forme $\Gamma_x(f) = \sum_{p=1}^{M} \sigma_{u_p}^2 \delta(f - f_p)$. Justifier rapidement cette écriture et préciser la valeur des $\sigma_{u_p}^2$ (seule une écriture symbolique correcte est demandée ici, sans autre justification).

Remarque : $\delta(f - f_p.)$ représente une masse de Dirac en la fréquence $f = f_p$ et se manipulera selon les règles «usuelles». En cas de souci de rigueur, on pourra remarquer que l'écriture proposée de $\Gamma_x(f)$ correspond à la mesure spectrale de puissance de x_n.

3. On considère un filtre donné par sa fonction de transfert en z :

$$H[z] = \prod_{p=1}^{M} (1 - e^{\mathrm{i}2\pi f_p} z^{-1})$$

(a) S'agit-il d'un filtre de réponse impulsionnelle finie ou infinie ?

(b) Préciser la réponse en fréquence $H(f)$ du filtre étudié et montrer qu'elle s'annule en les fréquences $f_p, p \in \{1, \ldots, M\}$.

4. On note y_n le signal aléatoire issu du filtre $H[z]$ lorsque le signal x_n défini à l'équation (12) ci-dessus est appliqué en entrée.

(a) Que vaut la densité spectrale de y_n ? Que vaut la puissance de y_n ?

(b) En déduire ce que vaut y_n.

5. On écrit $H[z]$ sous la forme $H[z] = 1 - \sum_{p=1}^{M} a_p z^{-p}$ où pour tout p, a_p est un coefficient que l'on peut exprimer en fonction des fréquences f_p (non demandé).

(a) Donner la réponse impulsionnelle h_n du filtre $H[z]$ en fonction des coefficient $a_p, p \in \{1, \ldots, M\}$.

(b) Déduire de la question 4 une relation de récurrence vérifiée par le signal x_n.

Réponses exercice: 46

1. Puisque les u_p sont décorrélées et centrées, on peut faire les calculs ci-dessous, qui justifient la stationnarité au sens large :

$$\mathbb{E}\{x_n\} = 0 \qquad \gamma_x(k) \triangleq \mathbb{E}\{x_n x_{n-k}^*\} = \sum_{p=1}^{M} \sigma_{u_p}^2 e^{\mathrm{i}2\pi k f_p}$$

où l'on a définit $\sigma_{u_p}^2 \triangleq \mathbb{E}\{[u_p|^2\}$.

2. On vérifie que l'écriture symbolique de transformée de Fourier inverse à temps discret de $\Gamma_x(f)$ redonne l'autocorrélation ci-dessus.

3. (a) Réponse impulsionnelle finie.

(b) $H(f) = \prod_{p=1}^{M} (1 - e^{\mathrm{i}2\pi f_p} e^{-\mathrm{i}2\pi f})$. Cette réponse en fréquence s'annule bien pour $f = f_p$ que que soit $p \in \{1, \ldots, M\}$.

4. (a) $\Gamma_y(f) = 0$ et la puissance est donc $\mathbb{E}\{|y_n|^2\} = 0$.

(b) $y_n = 0$.

5. (a)

$$h_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ -a_p & \text{si } 1 \leq n \leq M, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) Comme $y_n = 0$, on a : $x_n = \sum_{p=1}^{M} a_p x_{n-p}$.

Exercice 47: prédiction linéaire Pour des variables aléatoires réelles de carré sommable, on définit le produit scalaire par :

$$\langle X, Y \rangle \triangleq \mathbb{E}\{XY\}$$

où $\mathbb{E}\{.\}$ désigne l'espérance mathématique. On considère $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ un signal aléatoire réel, centré, stationnaire au sens large, et dont la fonction d'autocorrélation $(R_x(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ est supposée connue. Soient enfin n et m fixés, $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$. Cet exercice a pour but, dans deux cas particuliers, de déterminer une prédiction de x_n, notée $\hat{x}_n$, qui minimise l'erreur quadratique :

$$\mathcal{E} \triangleq \mathbb{E}\{(\hat{x}_n - x_n)^2\} \tag{13}$$

1. Nous recherchons dans un premier temps $\hat{x}_n$ comme la meilleure prédiction linéaire de x_n à partir de x_{n-m} ; c'est-à-dire que l'on cherche $\hat{x}_n$ sous la forme : $\hat{x}_n = \lambda x_{n-m}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Exprimer l'erreur $\mathcal{E}$ de l'équation (13) sous la forme d'un polynôme du second degré en λ. En déduire la valeur optimale de λ permettant de minimiser l'erreur quadratique ainsi que l'expression de $\hat{x}_n$ correspondante.

(b) Retrouver le résultat précédent en interprétant $\mathcal{E}$ comme une norme au carré et $\hat{x}_n$ comme une projection orthogonale.

2. Nous cherchons maintenant $\hat{x}_n$ comme la meilleure prédiction linéaire de x_n à partir des $x_{n-k}, k = 1, \dots, m$, c'est à dire que $\hat{x}_n$ s'écrit : $\hat{x}_n = \sum_{k=1}^m a_k x_{n-k}$ où les coefficients $a_k, k = 1, \dots, m$ sont réels.

(a) En vous inspirant de la question 1b, montrer que les coefficients $a_k, k = 1, \dots, m$ satisfont :

$$\forall l \in \{1, \dots, m\} \qquad \sum_{k=1}^{m} a_k R_x(k-l) = R_x(l).$$

(b) En déduire que les $a_k, k = 1, \dots, m$ sont solutions d'un système linéaire qui s'écrit sous la forme (on précisera les valeurs de $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}, c_m$) :

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{m-1} \\ c_1 & c_0 & \ddots & c_{m-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{m-1} & \dots & c_1 & c_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

Réponses exercice: 47

1. (a) $\mathcal{E} = \lambda^2 R_x(0) - 2\lambda R_x(m) + R_x(0)$ et donc : $\hat{x}_n = \frac{R_x(m)}{R_x(0)} x_{n-m}$.

(b) Ecrire l'orthogonalité entre l'erreur et l'espace sur lequel on projette : $\langle \hat{x}_n - x_n, x_{n-m} \rangle = 0$.

2. (a) De même qu'en 1b, écrire que l'on a $\forall l \in \{1, \dots, m\}, \langle \hat{x}_n - x_n, x_{n-l} \rangle = 0$. Le résultat est immédiat en remplaçant $\hat{x}_n = \sum_{k=1}^m a_k x_{n-k}$ et en utilisant la linéarité du produit scalaire.

(b) Simple traduction des équations de la question précédente : $\forall l, c_l = R_x(l)$.

Exercice 48: filtre adapté (temps discret)

Les différentes quantités et signaux de cet exercice sont supposés à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On considère un signal déterministe à temps discret supposé donné $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Ce signal modélise une impulsion qui, selon le cas est ou n'est pas transmise dans un canal. Au cours de la transmission s'ajoute une perturbation de type bruit additif (cette description correspond par exemple au cas d'un radar/sonar où le signal émis est renvoyé ou non selon la présence ou l'absence de cible). Ainsi, si l'on note $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc centré, on observe en réception :

$$\forall n \qquad \begin{cases} x_n = s_n + b_n & \text{si le signal est transmis,} \\ x_n = b_n & \text{si le signal n'est pas transmis.} \end{cases}$$

Le signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en réception est filtré par un filtre de réponse impulsionnelle $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ donnant ainsi le signal $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

1. D'après les hypothèses :

(a) Préciser si le signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est aléatoire ou déterministe. Même question pour $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

(b) Pour $p \in \mathbb{Z}$, préciser comment s'écrit y_p en fonction des signaux $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

2. Pour $p \in \mathbb{Z}$, en déduire $\mathbb{E}\{y_p\}$ selon si le signal $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est transmis ou ne l'est pas.

On s'intéresse au problème de détection qui consiste à décider la présence ou non du signal $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ à un instant $p \in \mathbb{Z}$ donné. Pour celà, la valeur de y_p est comparée à un seuil.

3. Dans cette question, on souhaite déterminer le filtre $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui permettra de faciliter au mieux le problème de détection. On suppose à partir de maintenant que $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est transmis.

(a) Justifier qu'on souhaite alors maximiser la quantité suivante, appelée rapport signal sur bruit :

$$\rho = \frac{\mathbb{E}\{y_p\}^2}{\mathbb{V}\mathrm{ar}\{y_p\}}$$

(b) On note σ_b^2 la puissance du bruit $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Calculer $\mathbb{V}\mathrm{ar}\{y_p\}$.

(c) Rappeler l'expression de l'énergie E_s du signal $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et déduire de ce qui précède que :

$$\rho \leq \frac{E_s}{\sigma_b^2}$$

(d) Montrer que la borne ci-dessus est atteinte lorsque le filtre $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est tel que $h_n = \lambda s_{p-n}$ où $\lambda \neq 0$ est une constante que l'on peut choisir librement. Le filtre ainsi déterminé est appelé *filtre adapté*.

Réponses exercice: 48

1. (a) $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est aléatoire ; $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est déterministe.

(b) $y_p = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k x_{p-k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_{p-k} x_k$ donc $y_p = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k b_{p-k}$ en absence de signal et $y_p = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k s_{p-k} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k b_{p-k}$ en présence de signal.

2. Comme le bruit est centré, $\mathbb{E}\{y_p\} = 0$ en l'absence de signal et $\mathbb{E}\{y_p\} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k s_{p-k}$ en présence de signal.

3. (a) Pour détecter la présence du signal $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on compare la valeur de y_p à un seuil. Or y_p est une variable aléatoire, de moyenne $\mathbb{E}\{y_p\}$ (nulle si absence du signal et non nulle si présence de $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$) et variance $\mathbb{V}\mathrm{ar}\{y_p\}$: pour faciliter la détection, il est naturel de souhaiter minimiser la variance de cette variable aléatoire et maximiser sa valeur moyenne en présence du signal à détecter.

(b) $\mathbb{V}\mathrm{ar}\{y_p\} = \sigma_b^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |h_k|^2$

(c) Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et se rappeler que $E_s = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |s_n|^2$.

(d) Il s'agit du cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Questions de cours

(d'après examens des années précédentes)

1. Qu'appelle-t-on un filtre en théorie du signal ? Quelle est la relation entrée-sortie qui correspond ?

2. A quelle(s) condition(s) dit-on qu'un signal aléatoire est stationnaire/ergodique ?

3. Qu'appelle-t-on réponse impulsionnelle d'un filtre ?

4. Rappeler le critère dit de Shannon du théorème d'échantillonnage (appelé aussi critère de Shannon-Nyquist selon les usages).

5. Rappeler la définition de la puissance et de l'énergie d'un signal déterministe.

6. Soit $y(t)$ un signal provenant du filtrage d'un signal $x(t)$ par un filtre de réponse en fréquence $H(f)$. Quel lien existe-t-il entre les densités spectrales de puissance de $x(t)$ et $y(t)$?

7. Résumer en quelques mots l'effet d'un échantillonnage sur le spectre d'un signal. Quelle est la condition d'échantillonnage d'un signal passe-bas qui en résulte, si l'on souhaite ne pas perdre d'information au cours de l'échantillonnage ?

8. Comment se définit un filtre en traitement du signal ? Si $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est la réponse impulsionnelle d'un filtre à temps discret, quelle est la relation entrée-sortie correspondante ?

9. Qu'est-ce que le procédé de modulation ? Qu'appelle-t-on porteuse dans la modulation ?

10. Rappeler la définition de l'autocorrélation d'un signal déterministe respectivement d'énergie finie / de puissance finie.

11. Rappeler la définition de la propriété de causalité d'un filtre. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la réponse impulsionnelle d'un filtre pour qu'il soit causal.

12. A quelle condition est-il théoriquement possible de reconstruire sans erreur un signal à temps continu à partir de ses échantillons prélevés à une fréquence f_e ?

13. Quelle est la définition de la transformée en z d'un signal à temps discret et quel lien existe-t-il entre la transformée en z et la transformée de Fourier à temps discret ?

14. Qu'appelle-t-on signal à bande étroite ? Donner un exemple classique.

15. Définir les notions de signal aléatoire et signal déterministe.

16. Comment se définit la densité spectrale de puissance ? Quel est le lien entre puissance et densité spectrale de puissance ?

17. Comment s'écrit la fonction de transfert en z d'un filtre numérique lorsque celui-ci est de réponse impulsionnelle finie (filtre transverse) ? Quelle est la relation correspondante qui permet de calculer la sortie ?

18. Quelle est la définition du signal analytique associé à un signal réel $x(t)$?

19. Définir ce qu'on appelle un signal quantifié et un signal échantillonné.

20. Comment s'écrit la fonction de transfert en z d'un filtre purement récursif (ou filtre AR : auto-régressif) ? Quelle est la relation correspondante qui permet de calculer la sortie ?

21. Comment se définit la transformée de Fourier à temps discret (TFTD) d'un signal (temps discret) $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

22. Quel est le lien entre la TFTD définie à la question précédente et la transformée de Fourier discrète (TFD) ? Qu'est-ce que la «FFT» ?

23. Quelle est la définition de l'intercorrélation $\gamma_{xy}(\tau)$ de deux signaux déterministes, à temps continu et de puissance finie (non nulle) ?

24. Comment se définit la densité spectrale de puissance pour un signal aléatoire ? Quel est le lien entre puissance et densité spectrale de puissance ?

25. Qu'est-ce qu'un bruit blanc ? On précisera ce que valent la densité spectrale et l'autocorrélation d'un bruit blanc.

26. Qu'est-ce que le procédé de modulation ? Préciser si les signaux appelés porteuse et modulante sont haute ou basse fréquence.

27. Quel nom donne-t-on à un signal aléatoire centré dont la densité spectrale de puissance est constante ? Comment s'exprime l'autocorrélation d'un tel signal ?

28. Quelle est la définition de l'intercorrélation $\gamma_{xy}(k)$ de deux signaux déterministes, à temps discret et d'énergie finie ?

29. Soit $y(t)$ un signal provenant du filtrage d'un signal $x(t)$ par un filtre de réponse en fréquence $H(f)$. Quel lien existe-t-il entre les densités spectrales de puissance $\Gamma_x(f)$ et $\Gamma_y(f)$ des deux signaux en question ?

30. Soit $h(t)$ un signal déterministe. Comment s'appelle l'opération qui à un signal $x(t)$ associe le signal $y(t) = h(t) \star x(t)$ (ou $\star$ désigne le produit de convolution) ? Rappeler l'écriture de $y(t)$ sous forme d'intégrale.

31. Comment se définit l'enveloppe complexe d'un signal à bande étroite $x(t)$? Un petit schéma dans le domaine des fréquences pourra être utile.

32. Que peut-on dire de la transformée de Fourier de signaux échantillonnés ? de la transformée de Fourier de signaux périodiques ?

33. Le signal analytique associé à un signal à valeurs réelles est-il à valeurs réelles ou complexes ? Justifier.

34. Donner la forme générale de la fonction de transfert en z d'un filtre purement récursif (ou filtre AR : auto-régressif). Quelle est l'équation temporelle donnant la sortie en fonction de l'entrée ?

35. Que peut-on dire du domaine de convergence de la fonction de transfert en z d'un filtre causal ? Faire un schéma.

36. Comment un signal aléatoire se définit-il mathématiquement ? Qu'appelle-t-on trajectoire d'un signal aléatoire ?

37. Quelle est le nom donné à un signal aléatoire stationnaire (sens large) dont la densité spectrale de puissance est constante ?

38. Qu'appelle-t-on algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT) ? Préciser le produit matriciel effectué et la (ou les) condition(s) pour que cet algorithme puisse être utilisé.

39. Si $X[z]$ est la transformée en z du signal à temps discret x_n, de quel signal $z^{-1}X[z]$ est-il la transformée en z ? Quel nom donne-t-on en général à cette propriété ?

40. Rappeler la propriété appelée «théorème du retard» vérifiée par la transformée en z.

41. Citer deux exemples connus (donnés en cours) de signaux aléatoires dont les accroissements sont indépendants.

42. A quelle condition dit-on d'un signal stationnaire qu'il est ergodique ?

43. Pour un signal aléatoire, rappeler à quelle(s) condition(s) il est stationnaire au sens large.

44. A quelles fréquences f_e peut-on échantillonner un signal de bande limitée $[-B, B]$ sans perdre d'information ? A quel(s) nom(s) est généralement associé ce résultat ?

45. Donner le signal analytique, la transformée de Hilbert et l'enveloppe complexe du signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ (où f_0 est une fréquence fixe donnée).

46. Pour un signal aléatoire à temps discret, stationnaire au sens large, donner, en précisant la formule utilisée pour la transformée de Fourier, la définition de :

(i) sa fonction d'auto-corrélation,

(ii) sa densité spectrale de puissance.

47. Soit $x(t)$ un signal déterministe à temps continu de transformée de Fourier $X(f)$. Donner deux expressions de son énergie, en fonction de $x(t)$ et de $X(f)$. Quel nom donne-t-on au lien entre ces deux expressions de l'énergie ?

48. Etant donné un signal temps continu $x(t)$, le signal échantillonné qui lui est associé est défini en annexe par $x_e(t) \triangleq x(t)\text{Ш}_{T_e}(t)$. Sachant que T_e est la période d'échantillonnage, préciser ce que signifie cette notation (en particulier $\text{Ш}_{T_e}(t)$) et donner l'expression de $x(t)$ en fonction des échantillons $(x(kT_e))_{k\in\mathbb{Z}}$.

49. Donner la forme générale de la fonction de transfert en z d'un filtre MA (moving average, appelé aussi moyenne mobile).

50. Notons $h(t)$ la sortie d'un filtre lorsqu'il est attaqué en entrée par un Dirac $\delta(t)$. Quel est le lien entre $h(t)$ et la réponse en fréquence ? Quel nom donne-t-on à $h(t)$?

51. Soit $x(t)$ est un signal haute-fréquence (autour d'une fréquence f_0), à valeurs réelles dont la transformée de Fourier est notée $X(f)$. Soit un filtre haute-fréquence de réponse en fréquence $H(f)$ et soit $\widetilde{H}(f)$ le filtre passe-bas équivalent. Donner le lien entre :

— l'entrée et la sortie du filtre, notée $y(t)$ (de transformée de Fourier $Y(f)$).

— les enveloppes complexes en entrée et sortie du filtre (notées $\xi_x(t)$, $\xi_y(t)$ respectivement et de transformées de Fourier $\Xi_x(f)$, $\Xi_y(f)$).

52. Pour un signal aléatoire, comment définit-on la densité spectrale de puissance ? Peut-on définir la transformée de Fourier d'une trajectoire et, si oui, préciser alors le lien avec la densité spectrale de puissance.

53. Pour un filtre dont la transformée en z est une fraction rationnelle : à quelle condition sur les pôles le filtre est-il stable et causal ?

54. Pour deux signaux d'énergie finie $x(t)$ et $y(t)$, rappeler la définition de leur intercorrélation $\gamma^e_{xy}(\tau)$. Exprimer ensuite $\gamma^e_{xy}(\tau)$ comme un produit de convolution de deux signaux que l'on précisera clairement.

55. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un signal à temps discret d'énergie finie et $X(f)$ sa transformée de Fourier à temps discret. Donner deux expressions de l'énergie de ce signal, l'une en fonction de x_n, l'autre en fonction de $X(f)$ (**préciser les bornes des intégrales et des sommes**).

56. $y(t)$ est un signal bande étroite (bande centrée autour d'une fréquence f_0) issu du filtrage d'un signal $x(t)$ également bande étroite par un filtre de réponse en fréquence $H(f)$. Définir le filtre passe-bas équivalent et donner la relation entre les transformées de Fourier $\Xi_x(f)$ et $\Xi_y(f)$ des enveloppes complexes de $x(t)$ et $y(t)$ respectivement.

57. Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la réponse impulsionnelle d'un filtre à temps discret. Donner une condition nécessaire sur cette dernière pour que le filtre soit :

(a) stable,

(b) causal.

58. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc centré à temps discret. Rappeler la définition de l'auto-corrélation $\gamma_x(k)$ de ce signal et préciser ce qu'elle vaut. Que peut-on dire de la densité spectrale de puissance ?

1. On définit le signal $x(t)$ par :

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Pi_\tau(t - nT)$$

où : $T > \tau$ sont deux réels positifs et Π_τ désigne une porte de largeur τ ($\Pi_\tau(t) = 1$ si $|t| \leq \tau/2$ et 0 sinon). Rappeler le calcul de la transformée de Fourier de ce signal que vous avez étudié en TP.

2. Supposons qu'un vecteur d'échantillons soit stocké sous la variable `x` dans l'environnement MATLAB . On souhaite obtenir une image du spectre en amplitude du signal `x` : sur l'axe horizontal doit apparaître une graduation correcte de la fréquence réduite (ou normalisée) sur l'intervalle $[0, 1]$. Compléter les lignes de code suivantes et préciser les valeurs que contiendra la variable `freq` :

```
N = length(x);
X = abs(fft(x));
freq = %%% completer cette ligne %%%
plot(freq,X);
```

3. Supposons qu'un vecteur d'échantillons soit stocké sous la variable `x` dans l'environnement MATLAB . Ce vecteur provient de l'échantillonnage à la fréquence F_e = 44kHz d'un signal sonore. On souhaite obtenir une image du spectre en amplitude du signal `x` : sur l'axe horizontal doit apparaître une graduation correcte de la fréquence réelle sur l'intervalle $[0, F_e]$. Compléter les lignes de code suivantes :

```
Fe = 44000;
N = length(x);
X = abs(fft(x));
freq = XXX;  %%% compléter cette ligne en remplacant convenablement XXX %%%
plot(freq,X);
```

4. Nous rappelons que l'algorithme le plus classique pour calculer une transformée de Fourier rapide (algorithme «FFT» de Cooley-Tuckey) nécessite que le nombre de points soit une puissance de 2. Si l'on tape `fft([1 0 0])`, le logiciel MATLAB renverra-t-il une erreur ? A défaut, préciser exactement ce qui sera renvoyé (avec valeur numérique).

5. Sous MATLAB , on suppose que `x` est un vecteur contenant les échantillons d'un signal. Quelle est la fonction de transfert en z du filtre appliqué au signal `x` lorsque l'on tape : `filter([1 -1],1,x)` ?

6. Nous rappelons que l'algorithme le plus classique pour calculer une transformée de Fourier rapide (algorithme «FFT» de Cooley-Tuckey) nécessite que le nombre de points soit une puissance de 2. Si l'on tape `fft([1 1 1])`, le logiciel MATLAB renverra-t-il une erreur ? A défaut, préciser exactement ce qui sera renvoyé (avec valeur numérique).

7. On considère le filtre (stable, causal) de fonction de transfert en z donnée par $H[z] = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$. Sous MATLAB , on suppose stocké dans une variable `x` les échantillons d'un signal. Donner la commande MATLAB qui permettra de filtrer les échantillons dans `x` par $H[z]$.

Questions de QCM

(d'après examens des années précédentes)

1. On considère le signal à temps discret $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et le vecteur $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_{N-1})$ constitué de N échantillons. $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas nul en dehors de ces N échantillons. La transformée de Fourier discrète du vecteur $\mathbf{x}$:

F est définie par :

$$X(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{-\mathrm{i}2\pi f n}$$

V évalue les valeurs de la fonction $X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\mathrm{i}2\pi f n}$ pour f prenant respectivement les valeurs $0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}$.

F ne peut se calculer que si N est une puissance de 2.

F évalue la transformée de Fourier à temps discret de $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ pour des fréquences discrètes. Les fréquences étant discrètes, $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un signal périodique.

2. La fonction d'autocorrélation $\gamma_x(\tau), \tau \in \mathbb{R}$ (en énergie ou puissance) d'un signal à temps continu $x(t), t \in \mathbb{R}$:

F est toujours une fonction périodique,

V peut être une fonction périodique selon le signal $x(t)$,

F vérifie pour tout τ : $\gamma_x(\tau) \geq 0$,

F est définie comme le module au carré de la transformée de Fourier de $x(t)$.

3. On peut observer un phénomène d'élargissement des raies spectrales :

F uniquement lorsque le principe d'incertitude de Heisenberg n'est pas contredit par le signal.

F lorsque la fréquence d'échantillonnage est mal choisie.

V de façon générale lors de la troncature temporelle d'un signal comportant des raies dans son spectre.

F uniquement lorsque le signal étudié est une sinusoïde convoluée avec une porte.

4. Soit $x(t)$ un signal et $X(f)$ sa transformée de Fourier (ce que l'on note par : $x(t) \xrightarrow{\mathrm{TF}} X(f)$). Alors :

V $x(t)e^{\mathrm{i}2\pi f_0 t} \xrightarrow{\mathrm{TF}} X(f - f_0)$

F $x(t + t_0) \xrightarrow{\mathrm{TF}} X(f t_0)$

F $x(at) \xrightarrow{\mathrm{TF}} aX(af)$

V si $x(t)$ est réel, alors $X(f) = X(-f)^*$.

5. Un signal sinusoïdal pur de fréquence 418Hz est échantillonné. La durée entre deux échantillons est de 20ms.

- **F** La condition d'échantillonnage de Shannon est respectée.
- **F** La condition d'échantillonnage de Shannon n'est pas respectée. Il y a repliement de spectre et une raie est repliée à 20Hz.
- **V** La condition d'échantillonnage de Shannon n'est pas respectée. Il y a repliement de spectre et une raie est repliée à 18Hz.
- **F** La transformée de Fourier à temps discret du signal échantillonné n'est pas définie car la condition d'échantillonnage n'est pas respectée.

6. Le domaine de convergence de la transformée en z d'un signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ à temps discret :

- **F** est $\mathbb{C}$ tout entier, sauf pour quelques cas particuliers,
- **F** n'est pas fondamental car les filtres que l'on considère sont souvent rationnels et n'ont donc qu'un nombre fini de pôles,
- **V** est important, car deux fonctions de la variable complexe z ayant la *même* expression mais définies sur des domaines de convergence distincts peuvent être les transformées de deux signaux à temps discret distincts,
- **F** doit contenir le cercle unité pour que le signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ existe.

7. Un filtre numérique rationnel défini par sa fonction de transfert en z $H[z]$ ou par sa réponse impulsionnelle $(h_n)_{\in\mathbb{Z}}$ est stable si et seulement si :

- **F** le domaine de convergence de $H[z]$ est du type $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > R\}$, où $R \in \mathbb{R}_+^*$,
- **F** les pôles de $H[z]$ sont à partie réelle négative,
- **F** la réponse impulsionnelle est bornée (càd il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout n, $|h_n| < M$),
- **V** $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h_k|$ est fini.

8. Soit $x(t)$ un signal réel et $X(f)$ sa transformée de Fourier. Rappelons que le signal analytique $x_a(t)$ associé au signal réel $x(t)$ peut être défini par sa transformée de Fourier :

$$X_a(f) = \begin{cases} 2X(f) & \text{si } f \geq 0, \\ 0 & \text{si } f < 0. \end{cases}$$

- **F** La transformation de $x(t)$ en signal analytique $x_a(t)$ est indispensable avant toute analyse à l'analyseur de spectre car seules les fréquences positives existent.
- **F** Le signal analytique $x_a(t)$ est un signal réel.
- **V** Le signal analytique $x_a(t)$ est un signal complexe.
- **F** Le signal analytique $x_a(t)$ peut être réel ou complexe, celà dépend du signal $x(t)$.

9. L'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT) :

F est un algorithme rapide qui permet de calculer la transformée de Fourier discrète ; il s'applique dès que le nombre d'échantillons est pair.

V est un algorithme rapide qui permet de calculer la transformée de Fourier discrète ; il s'applique lorsque le nombre d'échantillons est une puissance de deux.

F est un algorithme rapide pour le calcul du produit matriciel de l'équation (14) ci-dessous où $x_1, \ldots, x_N$ sont N échantillons ; l'algorithme s'applique dès que N est pair.

V est un algorithme rapide pour le calcul du produit matriciel de l'équation (14) ci-dessous où $x_1, \ldots, x_N$ sont N échantillons ; l'algorithme s'applique lorsque N est une puissance de deux.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \cdots & w^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \qquad \text{avec : } w = e^{\mathrm{i}2\pi/N} \tag{14}$$

10. Un signal sinusoïdal pur de fréquence 4135Hz est échantillonné. La durée entre deux échantillons consécutifs est de 0.5ms.

V La condition d'échantillonnage de Shannon n'est pas respectée. Il y a repliement de spectre et il existe une raie repliée à 1865Hz.

F La condition d'échantillonnage de Shannon n'est pas respectée. Il y a repliement de spectre et il existe une raie repliée à 1135Hz.

F La condition d'échantillonnage de Shannon n'est pas respectée. Il y a repliement de spectre et il existe une raie repliée à 865Hz.

F La condition d'échantillonnage de Shannon est respectée.

11. Le système $L : x(t) \mapsto y(t) = \int_{-\alpha+t}^{t} x(\theta)\, d\theta$ où $\alpha > 0$:

F est un filtre dont la réponse impulsionnelle ne s'annule jamais.

F est non linéaire.

F est non invariant dans le temps.

V est un filtre causal.

12. Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux à temps continu. On note $z(t) = x(t) \star y(t)$ leur produit de convolution.

V On a $z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta)y(t-\theta)\, d\theta$ et aussi $z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\theta)x(t-\theta)\, d\theta$.

F On a $z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta)y(t-\theta)\, d\theta$ mais, sauf cas particulier, $z(t) \neq \int_{-\infty}^{+\infty} y(\theta)x(t-\theta)\, d\theta$.

F On a $z(t) = x(t)y(t)$, ce qui est conforme avec le fait que le produit de convolution est commutatif.

F On a $z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta)y(\theta - t)\, d\theta$ et aussi $z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\theta)x(\theta - t)\, d\theta$.

13. Soit $\gamma_x(t)$ la fonction d'autocorrélation en puissance d'un signal $x(t)$ de puissance finie.

F $\gamma_x(t) \geq 0$ pour tout t.

F La puissance de de $x(t)$ vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma_x(t)|^2 \, dt$.

F La puissance de de $x(t)$ vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_x(t) \, dt$.

V $\gamma_x(0) \geq |\gamma_x(t)|$ pour tout t.

14. Un filtre à temps discret défini par sa réponse impulsionnelle $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ou par sa transformée en z $H[z]$ est stable si et seulement si :

F le domaine de convergence de $H[z]$ est un disque de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$.

F le domaine de convergence de $H[z]$ est du type $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$, où $R \in \mathbb{R}_+^*$.

V l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ est inclus dans le domaine de convergence de $H[z]$.

F $\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$.

15. Si $x = \begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & 5 & -2\end{bmatrix}$ et si on note $X = \begin{bmatrix}X_0 & X_1 & \dots & X_7\end{bmatrix}$ la transformée de Fourier discrète de la suite d'échantillons contenus dans le vecteur x, que vaut X_0 ?

F $+\sqrt{2} - i2\pi$

F $-\sqrt{2} + i2\pi$

V 0

F 8

16. Dans une modulation :

F Le signal qui contient l'information en bande de base est appelé porteuse.

V Le signal qui contient l'information en bande de base est appelé signal modulant.

F Le signal modulé est une sinusoïde pure.

F Le signal modulé est toujours obtenu à partir de la transformée de Hilbert du signal modulant.

17. La transformée de Fourier à temps discret

V est périodique de période 1.

F n'est définie que pour un ensemble fini de fréquences.

F n'a de sens que pour un signal de durée finie.

F n'a de sens que pour un signal de période 1.

18. Un filtre à temps continu est stable au sens entrée bornée-sortie bornée si et seulement si :

- **F** la réponse à un Dirac en entrée est de durée finie.
- **V** sa réponse impulsionnelle $h(t)$ satisfait : $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < +\infty$.
- **F** sa réponse impulsionnelle $h(t)$ satisfait : $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2\, dt < +\infty$.
- **F** sa réponse impulsionnelle $h(t)$ satisfait : $\lim_{t\to+\infty} h(t) = 0$.

19. Soit $x(t)$ un signal déterministe d'énergie finie, $X(f)$ sa transformée de Fourier et $\Gamma_x(f)$ sa densité spectrale d'énergie.

- **V** On a : $\forall f \in \mathbb{R} \quad \Gamma_x(f) = |X(f)|^2$.
- **F** On a : $\forall f \in \mathbb{R} \quad \Gamma_x(f) = |X(f)|$.
- **V** On a l'égalité : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_x(f)\, df$.
- **F** $\Gamma_x(f)$ est toujours maximal en 0.

20. Le domaine de convergence de la transformée en z d'un signal $x_n, n \in \mathbb{Z}$ à temps discret :

- **F** donne une indication sur l'inversibilité de la transformée en z : le cercle unité doit en effet appartenir au domaine de convergence.
- **F** est vide sauf pour des signaux de durée finie.
- **F** n'a aucun intérêt puisque seule l'expression de la transformée en z nous intéresse.
- **V** est important car une même fonction de la variable complexe z considérée sur des domaines de convergence distincts peut être la transformée en z de deux signaux à temps discret distincts.

21. La formule d'interpolation d'un signal à bande limitée :

- **F** est une approximation qui permet d'approcher les valeurs du signal entre les échantillons.
- **V** est une égalité; la reconstruction exacte du signal entre deux échantillons est possible en théorie.
- **F** ne fait intervenir que les échantillons passés du signal car un filtre de restitution doit être causal.
- **F** n'est valable que pour des signaux périodiques.

22. Un filtre à réponse impulsionnelle finie est aussi appelé :

- **V** filtre transverse.
- **F** filtre récursif.
- **F** filtre à causalité finie.
- **F** filtre à pôles positifs.

23. On considère l'opération qui à un signal à temps continu $x(t)$ associe le signal $y(t)$ défini par :

$$y(t) = \int_t^{t+\alpha} x(\theta)\, d\theta \qquad \text{avec } \alpha > 0.$$

F C'est une opération de filtrage par un filtre non causal dont la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h(\theta) = \begin{cases} x(\theta) & \text{si } \theta \in [t, t+\alpha] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

F C'est une opération de filtrage par un filtre causal dont la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h(\theta) = \begin{cases} x(\theta) & \text{si } \theta \in [t, t+\alpha] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

V C'est une opération de filtrage par un filtre non causal dont la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \in [-\alpha, 0] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

F C'est une opération de filtrage par un filtre causal dont la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \in [-\alpha, 0] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

24. Soit $T \in \mathbb{R}_+$ et $p_T(t)$ le signal porte défini par $p_T(t) = 1$ si $t \in [-T/2, T/2]$ et $p_T(t) = 0$ si $t \notin [-T/2, T/2]$. La transformée de Fourier $P_T(f)$ de $p_T(t)$:

F n'est pas dérivable car le signal $p_T(t)$ n'est pas continu.

V vérifie l'égalité : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |P_T(f)|^2\, df = T$

F est à valeurs complexes (et non pas réelles), comme c'est le cas pour toutes les transformées de Fourier.

F vaut : $P_T(f) = T\left(\dfrac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}\right)^2$ si $f \neq 0$ et $P_T(0) = 1$.

25. Soit $x(t)$ un signal à bande limitée, dont le support de la transformée de Fourier est inclus dans $[-B, B]$; soit $h(t)$ la réponse impulsionnelle d'un filtre quelconque. Soit $y(t)$ la sortie de ce filtre excité par $x(t)$.

V $y(t)$ est un signal à bande limitée.

F si T est une période d'échantillonnage telle que $1/T > 2B$, alors le signal à temps discret $(y(nT))$ coïncide avec la version filtrée de $(x(nT))$, la réponse impulsionnelle du filtre numérique dont il est question étant $(h(nT))$.

F puisque $y(t) = \int_{\mathbb{R}} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$, on peut toujours écrire, quel que soit $T > 0$:

$$y(nT) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(kT)x(nT - kT)$$

F $y(t)$ est un signal causal car obtenu par une opération de filtrage.

26. Soient les signaux à valeurs complexes $x_1(t) = e^{\mathrm{i}2\pi f_1 t}$ et $x_2(t) = e^{\mathrm{i}2\pi f_2 t}$ où les fréquences f_1 et f_2 valent $f_1 = -418$Hz et $f_2 = 582$Hz. $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont tous deux échantillonnés aux instants $nT_e, n \in \mathbb{Z}$, avec une durée $T_e = 1$ms entre deux échantillons.

F La condition d'échantillonnage de Shannon-Nyquist n'est pas vérifiée pour $x_1(t)$ et est vérifiée pour $x_2(t)$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a : $x_1(nT_e) = x_2(nT_e)$.

V La condition d'échantillonnage de Shannon-Nyquist est vérifiée pour $x_1(t)$ et n'est pas vérifiée pour $x_2(t)$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a : $x_1(nT_e) = x_2(nT_e)$.

F La condition d'échantillonnage de Shannon-Nyquist n'est vérifiée ni pour $x_1(t)$, ni pour $x_2(t)$.

F L'affirmation «$x_1(nT_e) = x_2(nT_e)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$» est inexacte car la condition d'échantillonnage de Shannon-Nyquist est vérifiée pour $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

27. Un filtre numérique rationnel défini par sa fonction de transfert en z $H[z]$ ou par sa réponse impulsionnelle $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stable si et seulement si :

F le domaine de convergence de $H[z]$ est du type $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > R\}$, où $R \in \mathbb{R}_+^*$.

F les pôles de $H[z]$ sont à partie réelle négative.

F la réponse impulsionnelle est bornée (càd il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout n, $|h_n| < M$).

V l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$ est inclus dans le domaine de convergence de $H[z]$.

28. La puissance moyenne d'un signal $x(t), t \in \mathbb{R}$:

V est définie par la limite suivante : $\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt$.

F est infinie si l'énergie de $x(t)$ est non nulle.

V est nulle lorsque l'énergie de $x(t)$ est finie.

F peut être négative dans le cas d'un signal complexe.

29. Soit $x(t)$ un signal déterministe d'énergie finie, $X(f)$ sa transformée de Fourier et $\Gamma_x(f)$ sa densité spectrale d'énergie.

V L'énergie de $x(t)$ vaut $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \, df$.

F On a : $\forall f \in \mathbb{R} \quad \Gamma_x(f) = |X(f)|$.

F $\Gamma_x(f)$ admet toujours une symétrie hermitienne, càd : $\forall f \in \mathbb{R} \quad \Gamma(f) = \Gamma(-f)^*$.

F $\Gamma_x(f)$ est toujours maximale en 0.

30. Soit $x(t)$ un signal à temps continu et valeurs réelles, $z_x(t)$ son signal analytique associé, $\widehat{x}(t)$ sa transformée de Hilbert et $\xi_x(t)$ son enveloppe complexe.

F $z_x(t)$ est à valeurs réelles car son spectre ne contient que des fréquences positives, les seules qui aient un sens physique.

F $\xi_x(t)$ est à valeurs complexes tandis que $z_x(t)$ est à valeurs réelles.

V Le signal $x(t)$ est la partie réelle de $z_x(t)$ et $\widehat{x}(t)$ est la partie imaginaire de $z_x(t)$.

F $\widehat{x}(t)$ ne peut pas être la partie imaginaire de $z_x(t)$ car $\widehat{x}(t)$ est un signal à valeurs complexes.

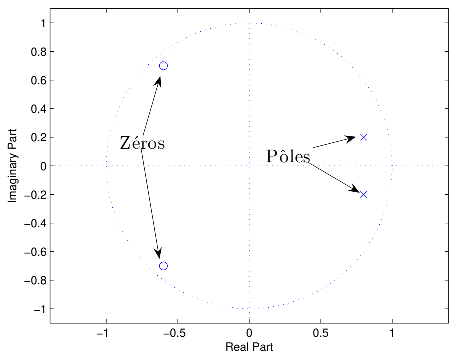


FIGURE 6 – Pôles et zéros dans le plan complexe du filtre des questions 31 et 32

31. On considère le filtre causal dont la transformée en z est donnée par :

$$H[z] = \frac{0,85z^{-2} + 1,2z^{-1} + 1}{0,68z^{-2} - 1,6z^{-1} + 1}$$

Ses zéros et pôles sont représentés sur la figure 6 page 59 :

V le filtre $H[z]$ est de type passe-bas.

F le filtre $H[z]$ est de type passe-bande.

F le filtre $H[z]$ est de type passe-haut.

F il est impossible d'avoir la moindre idée du comportement de ce filtre à partir des éléments donnés.

32. On considère le même filtre qu'à la question 31.

- **V** indépendamment des zéros, le filtre $H[z]$ est stable car ses pôles sont de module inférieur à 1.
- **F** indépendamment des pôles, le filtre $H[z]$ est stable car ses zéros sont de module inférieur à 1.
- **F** le filtre $H[z]$ est stable car ses zéros sont à partie réelle négative.
- **F** le filtre $H[z]$ est instable car ses pôles sont à partie réelle positive.

33. La transformée de Hilbert du signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ (où f_0 est une constante positive) :

- **F** vaut $\widehat{x}(t) = \frac{1}{2}\Big(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\Big)$. En effet, on peut écrire $x(t) = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}2\pi f_0 t} + e^{-\mathrm{i}2\pi f_0 t})$ et on sait que la transformée de Hilbert de l'exponentielle est un Dirac, noté ici δ.
- **F** vaut $\widehat{x}(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\Big)$. En effet, on peut écrire $x(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}2\pi f_0 t} - e^{-\mathrm{i}2\pi f_0 t})$ et on sait que la transformée de Hilbert de l'exponentielle est un Dirac, noté δ.
- **V** vaut $\widehat{x}(t) = \sin(2\pi f_0 t)$. Le signal analytique associé à $x(t)$ est alors bien $e^{\mathrm{i}2\pi f_0 t} = x(t) + \mathrm{i}\widehat{x}(t)$.
- **V** vaut $\widehat{x}(t) = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}2\pi f_0 t - \mathrm{i}\pi/2} + e^{-\mathrm{i}2\pi f_0 t + \mathrm{i}\pi/2})$. En effet, on peut écrire $x(t) = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}2\pi f_0 t} + e^{-\mathrm{i}2\pi f_0 t})$ et on sait que la transformée de Hilbert d'une exponentielle pure est obtenue par un déphasage pur de $-\pi/2$ si pour une fréquence positive et $+\pi/2$ pour une fréquence négative.

34. Un filtre numérique défini par sa fonction de transfert en z $H[z]$ ou par sa réponse impulsionnelle $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est causal si et seulement si :

- **F** $h_n > 0$ pout tout $n > 0$.
- **V** $h_n = 0$ pour tout $n < 0$.
- **V** le domaine de convergence de $H[z]$ est du type $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}$ (càd le complémentaire d'un disque centré en 0, point à l'infini compris).
- **F** le domaine de convergence de $H[z]$ est du type $\{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z| < R_2\}$ où R_2 est un réel positif (càd un anneau compris entre les cercles centrés en 0 et de rayon R_1 et R_2).

35. Soit $\Gamma_x(f)$ la densité spectrale d'énergie d'un signal $x(t)$.

- **F** L'énergie du signal vaut $\Gamma_x(0)$.
- **F** L'énergie du signal vaut $|\Gamma_x(0)|^2$.
- **V** L'énergie du signal vaut $\int_{\mathbb{R}} \Gamma_x(f)\, df$.
- **F** L'énergie du signal vaut $\int_{\mathbb{R}} |\Gamma_x(f)|^2\, df$.

36. Le signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ avec $f_0 = 93$Hz est échantillonné à la fréquence d'échantillonnage $F_e = 100$Hz pour former le signal $x_n = x(\frac{n}{F_e}), n \in \mathbb{Z}$.

F Il n'est pas possible de procéder ainsi car $2f_0 > F_e$ et la condition de Shannon-Nyquist du théorème d'échantillonnage n'est pas vérifiée.

F Il est possible de procéder ainsi car $f_0 \leq F_e$ et la condition de Shannon-Nyquist du théorème d'échantillonnage est vérifiée.

F Indépendamment de f_0 et F_e, il est toujours possible de procéder ainsi. Ici, $f_0 \leq F_e$ et la condition de Shannon-Nyquist du théorème d'échantillonnage est donc vérifiée.

V Indépendamment de f_0 et F_e, il est toujours possible de procéder ainsi. Ici, $2f_0 > F_e$ et la condition de Shannon-Nyquist du théorème d'échantillonnage n'est donc pas vérifiée.

37. L'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT) :

F est un algorithme rapide basé sur les propriétés fondamentales de la transformée de Fourier (linéarité, changement de variables, Parseval,...). Il permet le calcul de la transformée de Fourier des signaux à temps continu.

F est un algorithme rapide basé sur le théorème des résidus et qui permet le calcul de la transformée de Fourier des signaux à temps continu.

V est un algorithme rapide pour le calcul du produit matriciel de l'équation (15) ci-dessous lorsque N est une puissance de deux.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \cdots & w^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \qquad \text{avec : } w = e^{\mathrm{i}2\pi/N} \tag{15}$$

F est un algorithme rapide basé sur les propriétés du filtrage à temps continu et qui est utilisé dans les analyseurs de spectre analogiques.

38. La transformée de Fourier à temps discret :

F est obtenue par échantillonnage de la transformée de Fourier à temps continu.

V est définie pour des signaux à temps discret et est périodique de période 1.

F est définie pour des signaux à temps discret et est périodique de période 2π.

F est définie pour des signaux périodiques de période 1.

39. Soit $\gamma_x(t)$ la fonction d'autocorrélation en puissance d'un signal $x(t)$ de puissance finie.

F $\gamma_x(t) \geq 0$ pour tout t.

F La puissance de $x(t)$ vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma_x(t)|^2 \, dt$.

V $\gamma_x(t)$ peut être une fonction périodique.

V $\gamma_x(0) \geq |\gamma_x(t)|$ pour tout t.

40. Soit $\Gamma_x(f)$ la densité spectrale de puissance d'un signal $x(t)$ de puissance finie.

- **F** $\Gamma_x(0)$ est égal à la puissance du signal.
- **V** $\Gamma_x(f)$ est positif.
- **F** $\forall f \in \mathbb{R} \quad \Gamma_x(f) \leq \Gamma_x(0)$.
- **F** La puissance du signal vaut $\int_{\mathbb{R}} |\Gamma_x(f)|^2 \, df$.

41. Pour définir une densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire, il faut :

- **F** que toutes ses trajectoires soient d'énergie finie.
- **V** qu'il soit stationnaire au sens large.
- **F** que le module de sa transformée de Fourier soit borné.
- **F** que sa transformée de Fourier soit ergodique.

42. $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la sortie d'un filtre stable de réponse en fréquence $H(f)$ excité en entrée par un signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ aléatoire stationnaire au sens large.

- **F** $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un signal aléatoire stationnaire au sens large et sa transformée de Fourier à temps discret est $H(f)X(f)$ (où $X(f)$ est la transformée de Fourier du signal aléatoire $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$).
- **F** $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un signal aléatoire déterministe car le filtre est stable et sa transformée de Fourier à temps discret est $H(f)X(f)$ (où $X(f)$ est la transformée de Fourier du signal aléatoire $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$).
- **V** $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un signal aléatoire stationnaire au sens large et sa densité spectrale de puissance est $|H(f)|^2\Gamma_x(f)$ (où $\Gamma_x(f)$ est la densité spectrale de puissance de $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$).
- **F** $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un signal aléatoire stationnaire au sens large. En tant que signal aléatoire, on ne peut pas définir sa densité spectrale de puissance.

43. $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de puissance σ^2 envoyé en entrée d'un filtre stable de réponse impulsionnelle $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et de réponse en fréquence $H(f)$.

- **F** La densité spectrale de puissance en sortie est $H(f)X(f)$ où $X(f)$ est la transformée de Fourier à temps discret de $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.
- **F** La densité spectrale de puissance en sortie est $H(f)X(f)$ où $X(f)$ est la transformée de Fourier rapide de $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.
- **V** La densité spectrale de puissance en sortie est $|H(f)|^2\sigma^2$.
- **F** La densité spectrale de puissance en sortie est $H(f)\sigma$.

44. Un bruit blanc numérique :

- **V** a une densité spectrale de puissance constante.
- **F** a une densité spectrale de puissance égale à un Dirac.
- **F** a pour transformée de Fourier une constante.
- **F** a pour transformée de Fourier un Dirac.

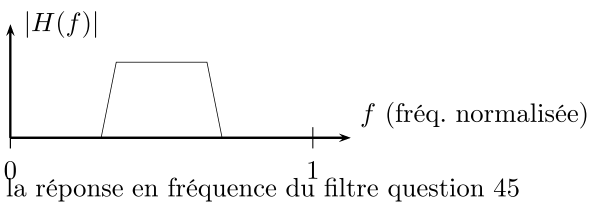


Figure 7 – Module de la réponse en fréquence du filtre question 45

45. La figure 7 représente schématiquement le module de la réponse en fréquence d'un filtre *numérique* en fonction de la fréquence normalisée.

F il s'agit d'un filtre passe-bas.

V il s'agit d'un filtre passe-haut.

F il s'agit d'un filtre passe-bande.

F il s'agit d'un filtre coupe-bande.

46. La figure 8 représente schématiquement le module de la réponse en fréquence d'un filtre numérique en fonction de la fréquence normalisée.

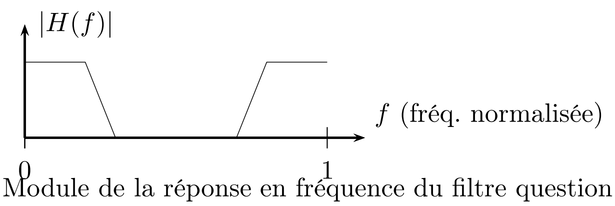


Figure 8 – Module de la réponse en fréquence du filtre question 46

V il s'agit d'un filtre passe-bas.

F il s'agit d'un filtre passe-haut.

F il s'agit d'un filtre passe-bande.

F il s'agit d'un filtre coupe-bande.

47. La figure 9 représente schématiquement le module de la réponse en fréquence d'un filtre numérique en fonction de la fréquence normalisée.

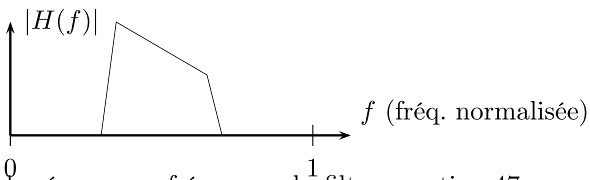


Figure 9 – Module de la réponse en fréquence du filtre question 47

F il s'agit d'un filtre passe-bande et sa réponse impulsionnelle est à valeurs complexes.

F il s'agit d'un filtre coupe-bande et sa réponse impulsionnelle est à valeurs réelles.

V il s'agit d'un filtre passe-haut et sa réponse impulsionnelle est à valeurs complexes.

F il s'agit d'un filtre passe-haut et sa réponse impulsionnelle est à valeurs réelles.

48. Soit $\Gamma_x(f)$ la densité spectrale d'énergie (ou respectivement de puissance) d'un signal $x(t)$.

F L'énergie (ou respectivement la puissance) du signal vaut $\int_{\mathbb{R}} |\Gamma_x(f)|^2 \, df$.

V L'énergie (ou respectivement la puissance) du signal vaut $\int_{\mathbb{R}} \Gamma_x(f) \, df$.

F L'énergie (ou respectivement la puissance) du signal vaut $\Gamma_x(0)$.

F L'énergie (ou respectivement la puissance)du signal vaut $|\Gamma_x(0)|^2$.

49. Un filtre numérique rationnel défini par sa fonction de transfert en z $H[z]$ ou par sa réponse impulsionnelle $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stable si et seulement si :

F les pôles de $H[z]$ sont à partie réelle négative.

V $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h_k|$ est fini.

V l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$ est inclus dans le domaine de convergence de $H[z]$.

F $\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$.

50. Pour les signaux aléatoires :

V la stationnarité au sens strict entraîne la stationnarité au sens large.

F la stationnarité au sens strict entraîne l'ergodicité.

F la stationnarité au sens large entraîne la stationnarité au sens strict.

F la stationnarité au sens large et au sens strict entraînent l'ergodicité.

51. L'autocorrélation d'un signal :

F est toujours positive.

F est positive par définition.

V est définie positive.

V présente une symétrie hermitienne.

52. Un filtre numérique défini par sa réponse impulsionnelle $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ou sa fonction de transfert en z $H[z]$ est stable et causal si et seulement si :

V $h_n = 0$ pour tout $n < 0$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |h_n|$ est fini.

F Tous les h_n sont de module inférieur à 1.

V Le domaine de convergence de $H[z]$ est le complémentaire d'un disque et le cercle unité appartient à ce domaine de convergence.

F Le domaine de convergence de $H[z]$ est un disque et le cercle unité appartient à ce domaine de convergence.

53. L'algorithme de Transformée de Fourier Rapide (ou FFT) :

F est un algorithme rapide de calcul de transformée de Fourier à temps continu.

F est un algorithme rapide de calcul temps réel de la transformée de Fourier d'un signal analogique.

F effectue un produit matriciel de transformée de Fourier discrète lorsque le nombre d'échantillons est un multiple de 2.

V effectue un produit matriciel de transformée de Fourier discrète lorsque le nombre d'échantillons est une puissance de 2.

54. Soit un filtre temps continu de réponse impulsionnelle $h(t)$ et de réponse en fréquence $H(f)$. Le filtre est excité en entrée par un signal *aléatoire* $x(t)$ stationnaire au sens large et sa sortie est notée $y(t)$.

F Les transformées de Fourier $X(f)$ et $Y(f)$ des signaux aléatoires $x(t)$ et $y(t)$ sont liées par $Y(f) = H(f)X(f)$.

F Les transformées de Fourier $X(f)$ et $Y(f)$ des signaux aléatoires $x(t)$ et $y(t)$ sont liées par $Y(f) = H(f) \star X(f)$ où $\star$ représente la convolution.

F Les transformées de Fourier $X(f)$ et $Y(f)$ des signaux aléatoires $x(t)$ et $y(t)$ sont égales aux densités spectrales de puissance respectives et on a $Y(f) = |H(f)|^2 X(f)$.

V On ne peut pas définir de transformée de Fourier des signaux aléatoires $x(t)$ et $y(t)$ dans le sens usuel (càd tel que rencontré en cours de mathématiques de début d'année).