TD Séparation de sources

Statistiques d'ordre supérieur et étude de quelques contrastes

1. On admet que pour des variables aléatoires centrées, on a les expressions suivantes des cumulants en fonction des moments :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cum}\{a,b\} &= \mathrm{E}\{ab\}\\ \mathrm{Cum}\{a,b,c\} &= \mathrm{E}\{abc\}\\ \mathrm{Cum}\{a,b,c,d\} &= \mathrm{E}\{abcd\} - \mathrm{E}\{ab\}\mathrm{E}\{cd\} - \mathrm{E}\{ac\}\mathrm{E}\{bd\} - \mathrm{E}\{ad\}\mathrm{E}\{bc\}\end{aligned}$$

   Vérifier qu'à partir de ces relations, on retrouve les propriétés des cumulants :
   – multilinéarité
   – nullité s'il existe un sous-ensemble de variables indépendantes des autres.
   Si a, b et c sont indépendantes, que peut-on dire de $\mathrm{Cum}\{a,b,c\}$? Si a et b sont indépendantes et c quelconque, peut-on affirmer que $\mathrm{Cum}\{a,b,c\} = 0$?
2. On note $\mathrm{C}_4\{a\} = \mathrm{Cum}\{a,a,a,a\}$. Calculer $\mathrm{C}_4\{a\}$ dans les cas suivants :
   – a vaut $+1$ ou -1 de manière équiprobable.
   – a est une variable aléatoire centrée, de variance unité et distribuée uniformément sur un intervalle.
3. On considère un vecteur $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_N)^{\mathrm{T}}$ de sources mutuellement indépendantes, $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ une matrice orthogonale et $\mathbf{y} = \mathbf{G}\mathbf{s}$. On souhaite étudier les critères de séparation suivant en fonction de $\mathbf{G}$.

$$\mathcal{C}_1(\mathbf{y}) \triangleq \sum_{i=1}^{N} |\mathrm{C}_4\{y_i\}|\,, \qquad \mathcal{C}_2(\mathbf{y}) \triangleq -\sum_{i=1}^{N} \mathrm{C}_4\{y_i\}, \qquad \mathcal{C}_3(\mathbf{y}) \triangleq \sum_{i=1}^{N} (\mathrm{C}_4\{y_i\})^2$$

   On notera $\kappa_i \triangleq \mathrm{C}_4\{s_i\}$ pour tout i.
   (a) Développer $\mathrm{C}_4\{y_i\}$ en fonction des κ_i et des coefficients de la matrice $\mathbf{G}$.
   (b) Montrer que $\mathcal{C}_1(\mathbf{y}) \leq \sum_{i=1}^{N} |\kappa_i|$ (indication : utiliser l'orthogonalité de $\mathbf{G}$).
   (c) On suppose $\forall i, \kappa_i \neq 0$. Montrer qu'en cas d'égalité dans la majoration précédente, $\mathbf{G}$ n'a qu'un et un seul élément non nul sur chaque ligne et chaque colonne et que cet élément vaut $+1$ ou -1 (indication : utiliser l'orthogonalité de $\mathbf{G}$).
   (d) Peut-on affaiblir l'hypothèse $\forall i, \kappa_i \neq 0$? Commenter.
4. Reprendre l'étude précédente pour $\mathcal{C}_2(\mathbf{y})$ en supposant que les $\kappa_i \neq 0$ sont négatifs. Préciser les hypothèses pour que $\mathcal{C}_2(\mathbf{y})$ soit un contraste.
5. Prouver que $\mathcal{C}_3(\mathbf{y})$ est un contraste sous les mêmes hypothèses que $\mathcal{C}_1(\mathbf{y})$ (indication : utiliser la convexité de $(.)^2$ afin d'obtenir une majoration).