

## SIC3601 : TD numéro 9



La transformée de Fourier à temps discret :

- 1 est obtenue par échantillonnage de la transformée de Fourier à temps continu.
- 2 est définie pour des signaux à temps discret et est périodique de période 1.
- 3 est définie pour des signaux à temps discret et est périodique de période  $2\pi$ .
- 4 est définie pour des signaux périodiques de période 1.

**Exercice 1: décimation, interpolation** Soit  $s(t)$  un signal à bande limitée  $[-B, B]$  dont l'allure du spectre est représentée schématiquement sur la figure 1.

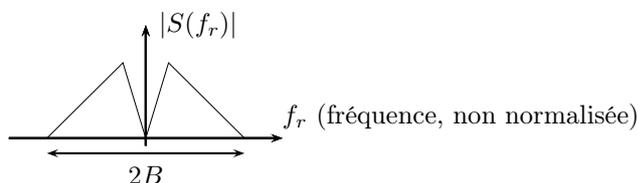


FIGURE 1 – Spectre schématique du signal  $s(t)$

1. On définit les signaux à temps discret :

$$\forall n : \quad x_n = s\left(\frac{n}{2B}\right) \quad z_n = s\left(\frac{n}{4B}\right)$$

Comment s'appelle l'opération qui consiste à recueillir les signaux ci-dessus à partir de  $s(t)$  ? La condition du théorème de Shannon-Nyquist est-elle vérifiée pour  $x_n$  ? pour  $z_n$  ?

2. Tracer l'allure schématique des spectres des signaux à temps discret  $x_n$  et  $z_n$  (on tracera l'allure des transformées de Fourier à temps discret respectives  $X(f)$  et  $Z(f)$  sur l'intervalle de fréquences normalisées  $[0, 1]$ ).

3. On définit le signal à temps discret  $y_n$  par :

$$\begin{cases} \text{Si } n \text{ est pair } (n = 2p), & y_{2p} = x_p \\ \text{Si } n \text{ est impair } (n = 2p + 1), & y_{2p+1} = 0 \end{cases}$$

Calculer la transformée en  $z$  de  $y_n$  (notée  $Y[z]$ ) en fonction de celle de  $x_n$  (notée  $X[z]$ ).

4. Quel est le lien entre  $Y[z]$  et la transformée de Fourier à temps discret de  $y_n$  (notée  $Y(f)$ ) ? En déduire un lien entre  $Y(f)$  et  $X(f)$ . Représenter alors l'allure de  $Y(f)$  sur l'intervalle de fréquences normalisées  $[0, 1]$ .

5. Montrer que par un filtrage passe-bas numérique de  $y_n$ , il est possible de retrouver  $z_n$ .

6. On souhaite obtenir la formule correspondant à l'interpolation précédemment décrite en fréquence.

(a) Considérer  $Z(f)$  sur l'intervalle  $[-1/4, 1/4]$ , décomposer cette fonction en série de Fourier sur cet intervalle et montrer que cette décomposition s'écrit :

$$Z(f) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} 2z_{2p} e^{-i4\pi p f} \quad (\text{sur l'intervalle } [-1/4, 1/4])$$

Rappel : Pour une fonction  $g$  périodique de période  $a$ , on rappelle qu'une écriture de la décomposition en série de Fourier est donnée par  $g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-i2\pi k x/a}$  avec  $c_k = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} g(x) e^{+i2\pi k x/a} dx$ .

- (b) Exprimer  $z_n$  en fonction de  $Z(f)$  puis en déduire la relation suivante qui exprime  $z_n$  en fonction des échantillons pairs :

$$z_n = \sum_{p \in \mathbb{Z}} z_{2p} \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi(n-2p)}{2} \right)$$

- (c) En déduire  $z_n$  en fonction des  $x_n$ .

**Exercice 2: transformée en cosinus discrète** Cet exercice redémontre quelques propriétés de la transformée de Fourier discrète (TFD) et introduit à partir de celle-ci la transformée en cosinus discrète qui est très utilisée dans les algorithmes de compression d'images (normes JPEG, MPEG, ...).

1. On considère les  $N$  échantillons  $(x_n)_{n=0, \dots, N-1}$  d'un signal à temps discret de durée finie. On rappelle que la transformée de Fourier à temps discret (TFTD) de  $(x_n)_{n=0, \dots, N-1}$  s'exprime par la somme (ici finie) :

$$X(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi k f}$$

On notera  $(X_n)_{n=0, \dots, N-1}$  la TFD de  $(x_n)_{n=0, \dots, N-1}$ .

- (a) Rappeler comment la TFD s'interprète comme les valeurs de la TFTD en  $N$  points de l'intervalle unité. Donner l'expression de  $(X_n)_{n=0, \dots, N-1}$ . Montrer que l'on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix} = \mathbf{W} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

où  $\mathbf{W}$  est la matrice  $\mathbf{W} = (w^{(k-1)(l-1)})_{k,l=1, \dots, N}$ , avec  $w \in \mathbb{C}$  à préciser.

- (b) Calculer  $\mathbf{W}\mathbf{W}^H$ . En déduire le lien entre  $\sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2$  et  $\sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2$  ainsi que la formule de la TFD inverse.

2. A partir de maintenant, on pose  $N = 2P$  et on suppose que  $(x_n)_{n=0, \dots, 2P-1}$  est réel. Quelle relation de symétrie cela entraîne-t-il pour les coefficients  $X_k$  ?
3. On fait l'hypothèse supplémentaire que  $\forall n \in \{0, \dots, 2P-1\} \quad x_{2P-1-n} = x_n$ .  
Montrer que cela permet d'écrire :

$$\forall k \in \{0, \dots, P\} \quad \exp\left(-i\frac{\pi k}{2P}\right) X_k = A_k$$

où  $A_k \in \mathbb{R}$  est à préciser.

4. Que vaut  $X_P$  ?

5. En déduire que  $\forall n \in \{0, \dots, P-1\}$ , 
$$x_n = \frac{1}{P} \left( \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{P-1} A_k \cos\left(\frac{\pi k}{P} \left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \right).$$

6. La transformée en cosinus discrète de  $(x_n)_{n=0, \dots, P-1}$  est définie par les coefficients  $(\tilde{A}_k)_{k=0, \dots, P-1}$  tels que :

$$\tilde{A}_k = \begin{cases} \frac{A_0}{2\sqrt{P}} & \text{si } k = 0, \\ \frac{A_k}{\sqrt{2P}} & \text{si } k \in \{1, \dots, P-1\}. \end{cases}$$

Vérifier que cette transformation conserve l'énergie du signal, càd que  $\sum_{n=0}^{P-1} x_n^2 = \sum_{k=0}^{P-1} \tilde{A}_k^2$ .