

---

**SIC3601 : TD numéro 7**


---



On considère l'opération qui à un signal à temps continu  $x(t)$  associe le signal  $y(t)$  défini par :

$$y(t) = \int_t^{t+\alpha} x(\theta) d\theta \quad \text{avec } \alpha > 0.$$

- 1] C'est une opération de filtrage par un filtre non causal dont la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h(\theta) = \begin{cases} x(\theta) & \text{si } \theta \in [t, t + \alpha] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 2] C'est une opération de filtrage par un filtre causal dont la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h(\theta) = \begin{cases} x(\theta) & \text{si } \theta \in [t, t + \alpha] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 3] C'est une opération de filtrage par un filtre non causal dont la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \in [-\alpha, 0] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 4] C'est une opération de filtrage par un filtre causal dont la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \in [-\alpha, 0] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$


---

**Exercice 1: distribution de Dirac**

1. Pour tout entier  $n \geq 1$ , soit  $\phi_n(t) = ne^{-\pi n^2 t^2}$ .

- (a) Faire un tracé des fonctions  $\phi_n$  et donner la limite de la suite de fonctions  $(\phi_n)_{n \geq 1}$  (convergence simple).  
 (b) Montrer que pour toute fonction  $f$  bornée et continue en 0, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(t) f(t) dt = f(0).$$

2. Pour tout entier  $n \geq 1$ , soit  $\phi_n(t) = n \mathbb{1}_{[-1/2n, 1/2n]}(t)$ .

- (a) Faire un tracé des fonctions  $\phi_n$  et donner la limite de la suite de fonctions  $(\phi_n)_{n \geq 1}$  (convergence simple).  
 (b) Montrer que pour toute fonction  $f$  continue en 0, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(t) f(t) dt = f(0).$$

3. Vérifier que les résultats précédents se généralisent en prenant  $\phi_n(t) = n\phi(nt)$  dans les cas suivants :

- (a)  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable,  $\int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt = 1$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et bornée.  
 (b)  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, de support borné,  $\int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt = 1$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue.

4. Soit la fonction  $\phi(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$  que l'on suppose prolongée par continuité en zéro et, pour tout entier  $n \geq 1$ , soient  $\phi_n(t) = n\phi(nt)$ . Nous admettrons (cf. cours de maths) :

- (lemme de Riemann-Lebesgue)  $\int_a^b f(t)e^{i2\pi nt} dt \xrightarrow[n \rightarrow \pm\infty]{} 0$  pour toute fonction  $f$  intégrable sur  $[a, b]$ .
- $\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^M \phi(t) dt = 1$

On suppose que  $f$  est une fonction de support borné telle qu'on peut l'écrire  $f(t) = f(0) + tg(t)$  pour  $g$  intégrable (c'est par exemple le cas si  $f$  est continûment dérivable). Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(t)f(t) dt = f(0).$$

5. Dans tous les cas ci-dessus, on définit  $\delta(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(t)$  qu'on appellera distribution (ou impulsion) de Dirac. C'est là une définition simplifiée et on notera que  $\delta(t)$  n'est pas une fonction. La théorie des distributions montre toutefois que  $\delta(t)$  peut se manipuler comme une fonction. On résume ci-dessous des éléments essentiels (aucune preuve n'est réellement demandée) :

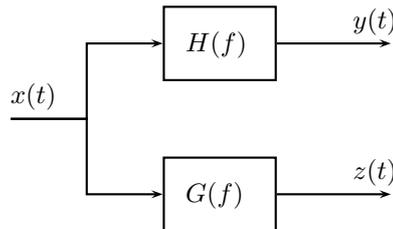
- (a) On peut définir la translatée  $\delta(t - \tau) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(t - \tau)$ . Alors  $\int_{\mathbb{R}} \delta(u - \tau)f(u) dt = f(\tau)$  sous les mêmes hypothèses que ci-dessus (vérifier qu'on obtient également cette relation par changement de variable). On admettra cette propriété pour toute fonction continue.
- (b) La distribution de Dirac est symétrique  $\delta(t) = \delta(-t)$  (vérifier).
- (c) Finalement, pour toute fonction continue, on a la propriété essentielle (noter la convolution) :

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)\delta(t - u) du = f(t) = \int_{\mathbb{R}} \delta(u)f(t - u) du$$

**Exercice 2: filtrage** Soit  $\beta > 0$  une constante et le filtre défini par sa réponse impulsionnelle

$$h(t) = \delta(t) - \beta e^{-\beta t} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) = \begin{cases} \delta(t) - \beta e^{-\beta t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

1. Le filtre est-il causal? Justifier.
2. Le filtre est-il stable? Justifier.
3. Exprimer la réponse en fréquence  $H(f)$  de ce filtre. Est-ce un passe-haut, passe-bas, passe-bande ou coupe-bande?
4. On définit un filtre complémentaire par sa réponse en fréquence  $G(f) = 1 - H(f)$ . Donner la réponse impulsionnelle  $g(t)$  correspondante.
5. Soit  $x(t)$  un signal de densité spectrale de puissance  $\Gamma_x(f)$  et qui attaque en entrée les filtres  $H(f)$  et  $G(f)$ . On note  $y(t)$  et  $z(t)$  les sorties correspondantes.



Calculer la densité spectrale de  $y(t) + z(t)$  en fonction de  $\Gamma_x(f)$ .

6. Calculer la densité spectrale de  $y(t) - z(t)$  en fonction de  $\Gamma_x(f)$ .