SIC3601 : TD numéro 6

? Soit le filtre temps discret stable et causal de fonction de transfert en z donnée par $H[z] = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$. Ce filtre est attaqué en entrée par un signal aléatoire à valeurs réelles dont la densité spectrale de puissance vaut $\Gamma_x(f) = \sigma^2$.

$\boxed{1}$ La densité spectrale du signal en sortie du filtre vaut $\frac{\sigma^2}{\frac{5}{4}-\cos(2\pi f)}$.

$\boxed{2}$ La densité spectrale du signal en sortie du filtre vaut $\frac{\sigma^2}{\frac{4}{3}-\cos(2\pi f)}$.

$\boxed{3}$ La densité spectrale du signal en sortie du filtre vaut $\frac{1}{\sigma^2-\cos(2\pi f)}$.

$\boxed{4}$ La densité spectrale du signal en sortie du filtre vaut $\frac{1}{\sigma^2+\cos(2\pi f)}$.

Exercice 1: filtrage d'un signal aléatoire (temps discret) Soit le filtre à temps discret défini par la relation de récurrence suivante entre le signal d'entrée $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et le signal de sortie $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad y_n = ay_{n-1} + x_n \tag{1}$$

où a est réel, $|a| < 1$.

1. Calculer la transformée en z (notée $H[z]$) du filtre en question. Compte tenu de la causalité imposée par l'équation (1), quel est le domaine de convergence de $H[z]$? Que peut-on en déduire concernant la stabilité du filtre ?

2. Calculer la réponse impulsionnelle $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ du filtre causal $H[z]$.

Le filtre est attaqué en entrée par un signal aléatoire à temps discret $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ réel, centré. De plus, sa densité spectrale vaut : $\Gamma_x(f) = 1$.
Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $\gamma_x(k) = \mathbb{E}\{x_n x_{n-k}\}$ la fonction d'autocorrélation de $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et on rappelle que la densité spectrale de $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est définie par : $\Gamma_x(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_x(k)e^{-\mathrm{i}2\pi kf}$.

3. Quelle est la réponse fréquentielle $H(f)$ du filtre $H[z]$? Calculer la densité spectrale $\Gamma_y(f)$ du signal $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en sortie du filtre (il est inutile de passer par le calcul de l'autocorrélation).

4. Que vaut la fonction d'autocorrélation du signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$? Calculer $\gamma_y(k), k \in \mathbb{Z}$ (on pourra utiliser le fait que les fonctions d'autocorrélation en entrée et sortie du filtre sont liées par la convolution $\gamma_y(k) = \gamma_h(k) \star \gamma_x(k)$ où $\gamma_h(k)$ est l'autocorrélation en énergie de la réponse impulsionnelle du filtre).

5. Calculer la réponse impulsionnelle du filtre *anti-causal* admettant $H[z]$ comme transformée en z sur un domaine de convergence à préciser.

Exercice 2: filtre adapté (temps discret)

Les différentes quantités et signaux de cet exercice sont supposés à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On considère un signal déterministe à temps discret supposé donné $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Ce signal modélise une impulsion qui, selon le cas est ou n'est pas transmise dans un canal. Au cours de la transmission s'ajoute une perturbation de type bruit additif (cette description correspond par exemple au cas d'un radar/sonar où le signal émis est renvoyé ou non selon la présence ou l'absence de cible). Ainsi, si l'on note $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc centré, on observe en réception :

$$\forall n \qquad \begin{cases} x_n = s_n + b_n & \text{si le signal est transmis,} \\ x_n = b_n & \text{si le signal n'est pas transmis.} \end{cases}$$

Le signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en réception est filtré par un filtre de réponse impulsionnelle $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ donnant ainsi le signal $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

1. D'après les hypothèses :

(a) Préciser si le signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est aléatoire ou déterministe. Même question pour $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

(b) Pour $p \in \mathbb{Z}$, préciser comment s'écrit y_p en fonction des signaux $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

2. Pour $p \in \mathbb{Z}$, en déduire $\mathbb{E}\{y_p\}$ selon si le signal $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est transmis ou ne l'est pas.

On s'intéresse au problème de détection qui consiste à décider la présence ou non du signal $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ à un instant $p \in \mathbb{Z}$ donné. Pour celà, la valeur de y_p est comparée à un seuil.

3. Dans cette question, on souhaite déterminer le filtre $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui permettra de faciliter au mieux le problème de détection. On suppose à partir de maintenant que $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est transmis.

(a) Justifier qu'on souhaite alors maximiser la quantité suivante, appelée rapport signal sur bruit :

$$\rho = \frac{\mathbb{E}\{y_p\}^2}{\mathbb{V}\mathrm{ar}\{y_p\}}$$

(b) On note σ_b^2 la puissance du bruit $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Calculer $\mathbb{V}\mathrm{ar}\{y_p\}$.

(c) Rappeler l'expression de l'énergie E_s du signal $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et déduire de ce qui précède que :

$$\rho \leq \frac{E_s}{\sigma_b^2}$$

(d) Montrer que la borne ci-dessus est atteinte lorsque le filtre $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est tel que $h_n = \lambda s_{p-n}$ où $\lambda \neq 0$ est une constante que l'on peut choisir librement. Le filtre ainsi déterminé est appelé *filtre adapté*.