

---

**SIC3601 : TD numéro 4**


---



Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  un signal d'énergie finie notée  $E_x$ . On note  $(\gamma_x(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  sa fonction d'autocorrélation en énergie et  $\Gamma_x(f)$  sa densité spectrale d'énergie.

$$\boxed{1} \quad E_x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_x(k).$$

$$\boxed{5} \quad E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_x(f) df.$$

$$\boxed{2} \quad E_x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\gamma_x(k)|^2.$$

$$\boxed{6} \quad E_x = \int_0^{+\infty} \Gamma_x(f) df.$$

$$\boxed{3} \quad E_x = \Gamma_x(0).$$

$$\boxed{4} \quad E_x = \int_0^1 \Gamma_x(f) df.$$

$$\boxed{7} \quad E_x = \gamma_x(0).$$

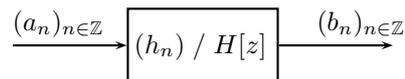

---

**Exercice 1: fonction d'autocorrélation / densité spectrale d'énergie** Soit le signal à temps discret ( $\alpha > 0$  est une constante)

$$x_n = \begin{cases} e^{-\alpha n} & \text{si } n \geq 0, \\ 0 & \text{si } n < 0. \end{cases} \quad (1)$$

1. Montrer que  $x_n$  est un signal d'énergie finie et calculer son énergie  $E_x$ .
  2. Calculer la fonction d'autocorrélation en énergie  $\gamma_x(k)$  et retrouver la valeur de  $E_x$ .
  3. Calculer la densité spectrale d'énergie  $\Gamma_x(f)$ .
  4. Retrouver  $E_x$  à partir de  $\Gamma_x(f)$ .
  5. Exprimer (sans calculer) l'énergie du signal contenue dans la bande de fréquences  $[-1/4, 1/4]$ .
- 

**Exercice 2: filtre à temps discret** On s'intéresse à un filtrage à temps discret dont le schéma ci-dessous donne les notations :

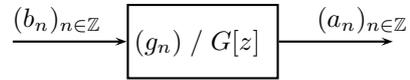


La réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ -1/2 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Uniquement à partir de la réponse impulsionnelle, dire (en justifiant) si le filtre est :
  - stable ?
  - causal ?
2. Exprimer à un instant  $n$  donné la sortie  $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  du filtre ci-dessus en fonction de l'entrée  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ .
3. Déterminer la fonction de transfert en  $z$   $H[z]$  ainsi que la réponse en fréquence  $H(f)$  de ce même filtre.
4. Calculer  $|H(f)|^2$  et tracer son allure en fonction de  $f$ . En déduire le type de filtre (passe-haut, passe-bas, passe-bande, coupe-bande).

5. On s'intéresse maintenant au filtre causal, inverse du filtre précédent :



Exprimer à un instant  $n$  donné la sortie  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  du filtre ci-dessus en fonction de cette sortie avant l'instant  $n$  et de l'entrée  $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . Calculer la fonction de transfert  $G[z]$ .

6. Préciser le domaine de convergence de  $G[z]$  et en déduire la stabilité (ou non) du filtre  $G[z]$ .
7. Calculer la réponse impulsionnelle de  $(g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et retrouver la stabilité (ou non) du filtre à partir de  $(g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ .
8. Parmi les acronymes AR, MA, ARMA, RIF, RII, dire en précisant leur signification, ceux que l'on donne aux filtres de fonction de transfert  $H[z]$  et  $G[z]$  respectivement.

**Exercice 3: fonction d'autocorrélation / densité spectrale (énergie)** Soit le signal suivant ( $A$  et  $\alpha$  sont des constantes positives strictement) :

$$x(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que  $x(t)$  est un signal d'énergie finie et calculer l'énergie  $E_x$ .
2. Calculer la fonction d'autocorrélation (en énergie)  $\gamma_x(\tau)$  et retrouver la valeur de  $E_x$  à partir de  $\gamma_x(\tau)$ .
3. Calculer la densité spectrale d'énergie  $\Gamma_x(f)$  du signal et retrouver la valeur de  $E_x$  à partir de  $\Gamma_x(f)$ .
4. Calculer l'énergie du signal contenue dans la bande de fréquences  $[-\frac{\alpha}{2\pi}, \frac{\alpha}{2\pi}]$ .