Corrigés des exercices

Exercice III.1 Dualité temps-fréquence

1 - $Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(t) e^{-i2\pi ft} dt$ soit en intégrant par parties :

$$Y(f) = \left[x(t)e^{-i2\pi ft}\right]_{-\infty}^{+\infty} + 2i\pi f \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \qquad \text{or} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt = X(f)$$

et $\left[x(t)e^{-i2\pi ft}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$ car x(t) étant d'énergie finie $\lim_{n \to \pm\infty} x(t) = 0$

donc $Y(f) = 2i\pi f \; X(f)$

Appliquons l'égalité de Parseval à $\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df$

soit
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x'^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 4\pi^2 f^2 |X(f)|^2 df$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x'^2(t) dt = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 |X(f)|^2 df$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x'^2(t) dt = 4\pi^2 \mathrm{B}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x'^2(t) dt = 4\pi^2 \mathrm{B}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$$ grâce à nouveau au théorème de Parseval.

2 - D'après l'inégalité de Schwartz $\left|\int_{-\infty}^{+\infty} t x'(t) x(t) dt\right|^2 \le \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 x^2(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} x'^2(t) dt$

soit $\left|\int_{-\infty}^{+\infty} t x'(t) x(t) dt\right|^2 \le 4\pi^2 \mathrm{B}^2 \mathrm{T}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$

or $\int_{-\infty}^{+\infty} t x'(t) x(t) dt$ peut s'intégrer par parties en posant :

$$\begin{cases} u = t & du = dt \\ dv = x'(t)\,x(t)\,dt & v = \dfrac{x^2(t)}{2} \end{cases}$$

soit $\int_{-\infty}^{+\infty} t x'(t) x(t) dt = \left[\frac{t x(t)}{2}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$

on a alors $\frac{1}{4}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt\right]^2 \leq 4\pi^2 \mathrm{B}^2\mathrm{T}^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt\right]^2$

d'où $\mathrm{B}^2\mathrm{T}^2 \geq \frac{1}{16\pi^2}$ soit $\boxed{\mathrm{BT} \geq \frac{1}{4\pi}}$

En conclusion, la limitation du support du signal dans l'un des deux domaines (temporel ou fréquentiel) l'exclut dans l'autre.

3 - Le produit BT est minimum, c'est à dire égal à $\frac{1}{4\pi}$ pour les signaux tels que l'inégalité de Schwartz du 2° se réduise à une égalité soit si et seulement si $\exists\lambda$ tel que $x'(t) = \lambda\, t\, x(t)$. La résolution de cette équation différentielle nous donne :

$x(t) = A\,\mathrm{e}^{\frac{\lambda t^2}{2}}$. Mais pour qu'un tel signal soit d'énergie finie il faut que $\lambda < 0$ de façon à ce que $\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = 0$.

En d'autres termes, les signaux pour lesquels le produit BT est minimum sont les impulsions "gaussiennes" de la forme $x(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-\alpha t^2}$ avec $\alpha > 0$.

4 - Si $x(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-2\pi t^2}\, dt$ peut s'intégrer par parties en posant :

$$\begin{cases} u(t) = t & \dfrac{du(t)}{dt} = dt \\ \dfrac{dv(t)}{dt} = t\,\mathrm{e}^{-2\pi t^2}\, dt & v(t) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-2\pi t^2}}{4\pi} \end{cases}$$

d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-2\pi t^2}\, dt = \left[-\frac{t\,\mathrm{e}^{-2\pi t^2}}{4\pi}\right] + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\pi t^2}\, dt$ d'où $\mathrm{T}^2 = \frac{1}{4\pi}$

On montrerait de la même manière que $\mathrm{B}^2 = \frac{1}{4\pi}$ d'où $\mathrm{BT} = \frac{1}{4\pi}$.

On retrouve donc le résultat de la question précédente.

5 - L'énergie de x(t) est donnée par $\mathrm{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\pi t^2}\, dt$.

Posons $y(t) = x^2(t) = \mathrm{e}^{-2\pi t^2}$ et désignons par Y(f) la TF de y(t).

$y(t) = \mathrm{e}^{-\pi\left(t\sqrt{2}\right)^2}$ et grâce au théorème du changement d'échelle on obtient :

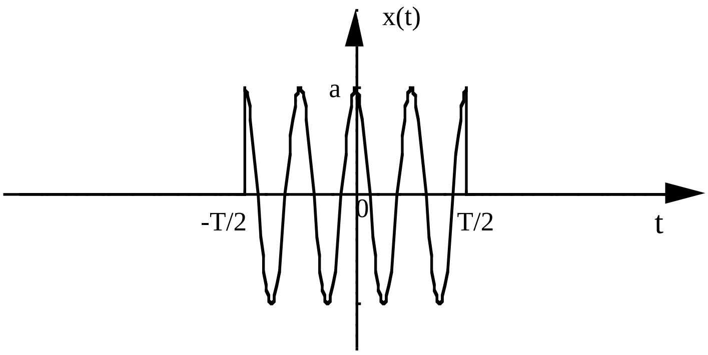
$Y(f) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-\pi\left(\frac{f}{\sqrt{2}}\right)^2}$.

Enfin, en utilisant la propriété générale : $\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)dt = Y(0)$ on voit que :

$\mathrm{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)dt = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice III.2 Influence de la troncature d'un signal sur son spectre.

Le signal x(t) est une sinusoïde tronquée, T correspondant à la largeur de la troncature.



Ce signal peut s'écrire sous la forme $x(t) = A \cos 2\pi f_0 t \ . \ \Pi_T(t)$.

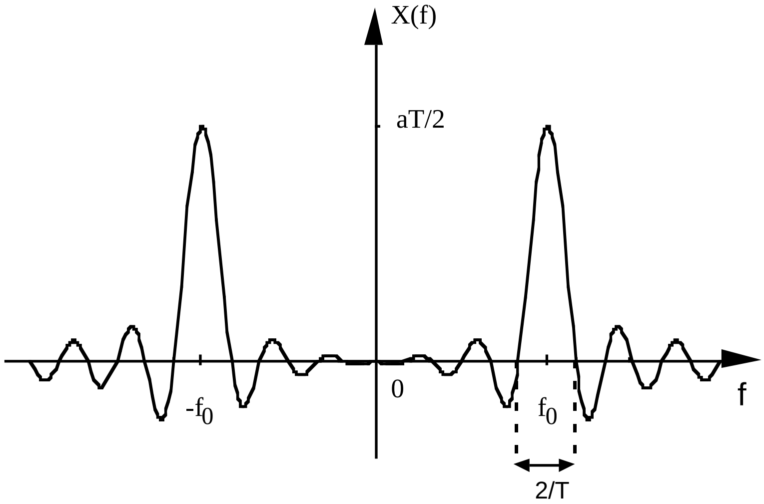
C'est un signal d'énergie finie car $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\, dt = A^2 \int_{-T/2}^{+T/2} \cos^2 2\pi f_0 t\, dt$ est une quantité finie.

Calculons sa transformée de Fourier.

$X(f) = TF[\ A \cos 2\pi f_0 t\ ] * TF[\ \Pi_T(t)\ ]$

$X(f) = \dfrac{AT}{2} \left\{ \delta(f-f_0) + \delta(f+f_0) \right\} * \mathrm{sinc}\ \pi f T$

$X(f) = \dfrac{AT}{2} \left\{ \mathrm{sinc}\ \pi(f-f_0)T + \mathrm{sinc}\ \pi(f+f_0)T \right\}$



On remarque que si T -> ∞ (x(t) tend vers une sinusoïde pure) $\frac{1}{T}$ -> 0 et chaque sinc se "resserre" pour tendre à la limite vers deux Dirac centrés sur $\pm f_0$.
Inversement, plus la largeur T de la troncature est petite, plus le spectre "s'étale" en fréquence.

Calculons l'énergie de ce signal.
Le théorème de Parseval nous permet de calculer cette énergie par intégration, soit dans le domaine temporel, soit dans le domaine fréquentiel. Il est ici plus simple d'intégrer dans le domaine temporel. En particulier, dans le cas où $T = T_0 = \frac{1}{f_0}$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = A^2 \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \cos^2 2\pi f_0 t\,dt = 2A^2 \int_{0}^{+T_0/2} \cos^2 2\pi f_0 t\,dt = 2A^2 \int_{0}^{+T_0/2} \frac{1 + \cos 4\pi f_0 t}{2}\,dt$$

$$E = \frac{A^2}{T_0} + \int_{0}^{+T_0/2} \cos 4\pi f_0 t\,dt$$

or $$\int_{0}^{+T_0/2} \cos 4\pi f_0 t\,dt = \frac{1}{4\pi f_0}\left[\sin\ 2\pi f_0 t_0\right] = 0$$

donc $$\boxed{E = \frac{A^2 T_0}{2}}$$

Exercice III.3

1 -

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = A^2 \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t}\,dt = \frac{A^2}{2\alpha}\left[-e^{-2\alpha t}\right]_0^{+\infty} = \frac{A^2}{2\alpha} < +\infty$$

Donc l'énergie du signal $E = \dfrac{A^2}{2\alpha}$ est finie.

2 - $R_{xx}(\tau) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x(t-\tau)\, dt$

$x(t) = A\, e^{-2\alpha t} . u(t)$ où $u(t)$ désigne la fonction échelon unité de Heaviside.

$R_{xx}(\tau) = A^2 \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}\, e^{-\alpha(t-\tau)}\, u(t)\, u(t-\tau)\, dt$

<u>1° cas</u> : $t \geq 0$

$u(t)\, u(t-\tau) = u(t-\tau)$ donc $R_{xx}(\tau) = A^2 e^{\alpha\tau} \displaystyle\int_{\tau}^{+\infty} e^{-2\alpha t}\, dt = A^2 e^{\alpha\tau}\left[-\frac{e^{-2\alpha t}}{2\alpha}\right]_{\tau}^{+\infty}$

soit $R_{xx}(\tau) = \dfrac{A^2}{2\alpha} e^{-\alpha\tau}$

<u>2° cas</u> : $t < 0$

$u(t)\, u(t-\tau) = u(t)$ donc $R_{xx}(\tau) = A^2 e^{\alpha\tau} \displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-2\alpha t}\, dt = A^2 e^{\alpha\tau}\left[-\frac{e^{-2\alpha t}}{2\alpha}\right]_{0}^{+\infty}$

soit $R_{xx}(\tau) = \dfrac{A^2}{2\alpha} e^{\alpha\tau}$

En résumé et pour tout τ $\boxed{R_{xx}(\tau) = \dfrac{A^2}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|}}$

On retrouve l'énergie du signal en évaluant R_{xx} en 0 : $E = R_{xx}(0) = \dfrac{A^2}{2\alpha}$

3 - Pour calculer la DSP $S_{xx}(f)$ de $x(t)$ on peut :

- soit calculer la TF $X(f)$ de $x(t)$ et écrire que $S_{xx}(f) = |X(f)|^2$
- soit calculer directement la TF de $R_{xx}(\tau)$

<u>1° solution</u> :

$X(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-i2\pi ft}\, dt = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}\, e^{-i2\pi ft}\, dt$

$$X(f) = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t(\alpha+i2\pi ft)}dt = A \left[-\frac{e^{-t(\alpha+i2\pi ft)}}{\alpha + i2\pi ft} \right]_0^{+\infty} = \frac{A}{\alpha + i2\pi ft}$$

d'où $\boxed{S_{xx}(f) = \dfrac{A^2}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}}$

<u>2° solution</u> :

$$TF[R_{xx}(\tau)](f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^2}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|} e^{-i2\pi f\tau} d\tau = \frac{A^2}{2\alpha}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha\tau} e^{-i2\pi f\tau} d\tau + \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha\tau} e^{-i2\pi f\tau} d\tau \right]$$

$$TF[R_{xx}(\tau)](f) = \frac{A^2}{2\alpha}\left[\frac{1}{\alpha^2 - 4\pi^2 f^2} + \frac{1}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} \right] = \frac{A^2}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$$

d'où $\boxed{S_{xx}(f) = \dfrac{A^2}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}}$

On peut alors retrouver l'énergie du signal par :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^2}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} df = \frac{A^2}{\alpha^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{4\pi^2 f^2}{\alpha^2}} df$$

soit, en posant $\nu = \dfrac{2\pi f}{\alpha}$ $\qquad d\nu = \dfrac{2\pi}{\alpha} df$

$$E = \frac{A^2}{2\pi\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2} du = \frac{A^2}{2\pi\alpha}[\, \text{Arctg } u]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{A^2}{2\alpha^2}$$

4 - L'énergie E' du signal contenue dans la bande $\left[-\dfrac{\alpha}{2\pi} \,,\, +\dfrac{\alpha}{2\pi} \right]$ est donnée par :

$$E' = \int_{-\alpha/2\pi}^{\alpha/2\pi} S_{xx}(f)\, df = \frac{A^2}{\alpha^2} \int_{-\alpha/2\pi}^{\alpha/2\pi} \frac{1}{1 + \frac{4\pi^2 f^2}{\alpha^2}} df$$

soit, en utilisant le même changement de variable que précédemment :

$$E' = \frac{A^2}{2\pi\alpha} \int_{-\alpha/2\pi}^{\alpha/2\pi} \frac{1}{1 + u^2} du = \frac{A^2}{2\pi\alpha}[\, \text{Arctg } u]_{-1}^{1} = \frac{A^2}{2\alpha^2} \frac{\pi}{2}$$

soit $\boxed{E' = \frac{A^2}{4\alpha^2} = \frac{E}{2}}$

La moitié de l'énergie du signal se situe dans la bande considérée.

Exercice III.4

La fonction $\Pi_T(t)$ est une fonction paire, donc $TF[\, TF[\, \Pi_T(t)]] = \Pi_T(t)$

i.e. $\Pi_T(t) \xrightarrow{TF} T \text{ sinc}(\pi f T) \xrightarrow{TF} \Pi_T(t)$

donc $2B \text{ sinc}(\pi 2Bt) \xrightarrow{TF} \Pi_{2B}(f)$

et $TF[\text{ sinc}(\pi 2Bt)\,] = \frac{1}{2B}\Pi_{2B}(f)$

$x(t) = a\cos(2\pi f_0 t)\,.\,\cos(2\pi f_0 t)\,.\,\text{sinc}(2\pi Bt)$ donc

$X(f) = TF[\,a\cos(2\pi f_0 t)\,] * TF[a\cos(2\pi f_0 t)\,] * TF[\text{sinc}(2\pi Bt)]$

$X(f) = \frac{a}{2}\left[\,\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right] * \frac{1}{2}\left[\,\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right] * \frac{1}{2B}\Pi_{2B}(f)$

$X(f) = \frac{a}{8B}\left[\,\delta(f-2f_0) + 2\delta(f) + \delta(f+2f_0)\right] * \Pi_{2B}(f)$

$$\boxed{X(f) = \frac{a}{8B}\left[\,\Pi_{2B}(f-2f_0) + \Pi_{2B}(f+2f_0)\right] + \frac{a}{4B}\Pi_{2B}(f)}$$

Il est ici plus facile de calculer l'énergie du signal x(t) en intégrant dans le domaine fréquentiel :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\, df = 2B\left[\left(\frac{a}{4B}\right)^2 + \left(\frac{a}{4B}\right)^2 + \left(\frac{a}{4B}\right)^2\right] = \frac{3a^2}{16B}$$

Exercice III.5

1 - $S_{xx}(f) = TF[R_{xx}(\tau)] = \frac{A^2}{2}\left\{TF[1] + TF\left[e^{-\frac{|\tau|}{RC}}\right]\right\}$

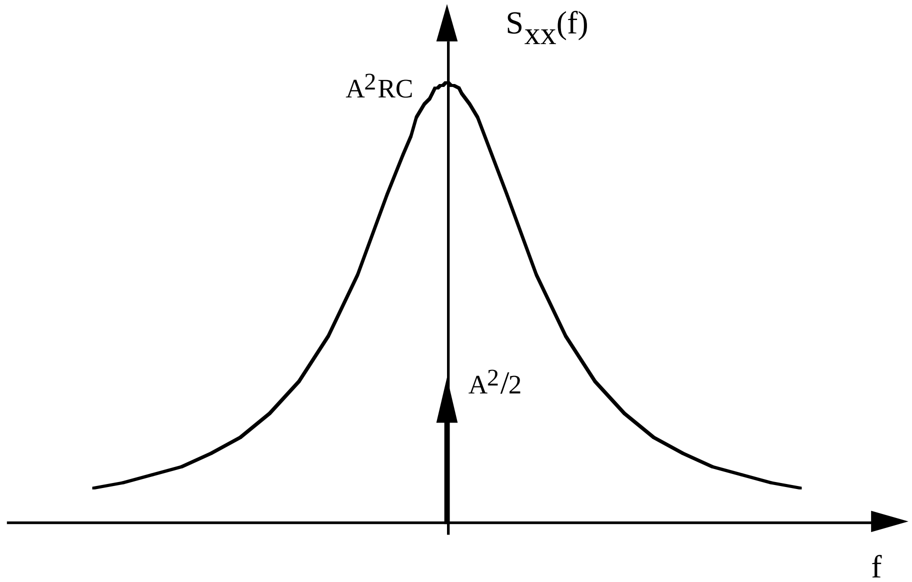
$TF[1] = \delta(f)$

$$TF\left[e^{-\frac{|\tau|}{RC}}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|\tau|}{RC}}\, e^{-2i\pi f}\, d\tau = \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{\tau}{RC}}\, e^{-2i\pi f}\, d\tau + \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\tau}{RC}}\, e^{-2i\pi f}\, d\tau$$

$$\mathrm{TF}\left[e^{-\frac{|\tau|}{RC}}\right] = \frac{1}{\frac{1}{RC}-2i\pi f}\left[e^{\left(\frac{1}{RC}-2i\pi f\right)\tau}\right]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{\frac{1}{RC}+2i\pi f}\left[e^{-\left(\frac{1}{RC}+2i\pi f\right)\tau}\right]_{0}^{+\infty}$$

$$\mathrm{TF}\left[e^{-\frac{|\tau|}{RC}}\right] = \frac{1}{\frac{1}{RC}-2i\pi f} + \frac{1}{\frac{1}{RC}+2i\pi f} = \frac{\frac{2}{RC}}{\frac{1}{R^2C^2}+4\pi^2 f^2}$$

d'où $$\boxed{S_{xx}(f) = \frac{A^2}{2}\delta(f) + \frac{\frac{A^2}{RC}}{\frac{1}{R^2C^2}+4\pi^2f^2} = \underbrace{\frac{A^2}{2}\delta(f)}_{\text{partie discrète}} + \underbrace{\frac{A^2RC}{1+4\pi^2f^2R^2C^2}}_{\text{partie continue}}}$$



2 - La puissance P du signal peut être calculée de deux manières :

- $P = R_{XX}(o) = A^2$
- ou plus laborieusement

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f)\,df = \frac{A^2}{2} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^2RC}{1+4\pi^2f^2R^2C^2}\,df$$

en posant $u = 2\pi fRC$ $\quad du = 2\pi RC\, df$

$$P = \frac{A^2}{2} + 2A^2\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\,\frac{du}{1+u^2}$$

$$P = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{\pi}\left[\mathrm{Arctg}\,u\right]_0^{+\infty} = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} = A^2$$

3 - La puissance contenue dans la bande $\left[0\ ,+\frac{1}{2\pi RC}\right]$ est :

$$P = \frac{A^2}{2} + \int_{-\frac{1}{2\pi RC}}^{+\frac{1}{2\pi RC}} \frac{A^2 RC}{1+4\pi^2 f^2 R^2 C^2}\, df$$

$$P = \frac{A^2}{2} + \int_{-\frac{1}{2\pi RC}}^{+\frac{1}{2\pi RC}} \frac{A^2 RC}{1+4\pi^2 f^2 R^2 C^2}\, df = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{\pi}\int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{4} = \frac{3A^2}{4}$$

Exercice III.6

$$\langle x_n(t), x_m(t)\rangle = \frac{1}{T_0}\int_{\alpha-\frac{T_0}{2}}^{\alpha+\frac{T_0}{2}} e^{i2\pi\frac{(n-m)}{T_0}t}\, dt$$

• si $n \neq m$

$$\langle x_n(t), x_m(t)\rangle = \frac{1}{T_0}\left[\frac{e^{i2\pi\frac{n-m}{T_0}t}}{i2\pi\frac{n-m}{T_0}}\right]_{\alpha-\frac{T_0}{2}}^{\alpha+\frac{T_0}{2}} = \frac{1}{\pi(n-m)}e^{i2\pi\frac{n-m}{T_0}\alpha}\sin\left(\pi(n-m)\right) = 0$$

• si $n = m$

$$\langle x_n(t), x_m(t)\rangle = \frac{1}{T_0}\int_{\alpha-\frac{T_0}{2}}^{\alpha+\frac{T_0}{2}} dt = 1$$

Les signaux $x_n(t)$ sont bien de norme unité et 2 à 2 orthogonaux.

Exercice III.7

1 - Posons $\mathbf{a} = \left[\alpha_1, ..., \alpha_N\right]^T$, alors $\forall \mathbf{a}$

$\varepsilon^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)-\hat{x}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2 dt - \sum_{i=1}^{N}\alpha_i^* \int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\phi_i^*(t)dt - \sum_{i=1}^{N}\alpha_i \int_{-\infty}^{+\infty}x^*(t)\phi_i(t)dt + \sum_{i=1}^{N}|\alpha_i|^2$ (car les $\phi_i(t)$ sont orthonormés).

Posons $f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{N}|\alpha_i|^2 - \sum_{i=1}^{N}\alpha_i^* \int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\phi_i^*(t)dt - \sum_{i=1}^{N}\alpha_i \int_{-\infty}^{+\infty}x^*(t)\phi_i(t)dt$

alors $\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{N}|x(t)|^2 + f(\mathbf{a})$ et minimiser ε^2 par rapport à **a** revient à minimiser $f(\mathbf{a})$.

Montrons que $\forall \mathbf{a} \quad f(\mathbf{a}) \geq -\sum_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\phi_i^*(t)dt \int_{-\infty}^{+\infty}x^*(t)\phi_i(t)dt$:

$$f(\mathbf{a})+\sum_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\phi_i^*(t)dt\int_{-\infty}^{+\infty}x^*(t)\phi_i(t)dt=\sum_{i=1}^{N}\begin{bmatrix}|\alpha_i|^2-\alpha_i^*\int x(t)\phi_i^*(t)dt\\ -\alpha_i\int x^*(t)\phi_i(t)dt\\ +\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\phi_i^*(t)dt\int_{-\infty}^{+\infty}x^*(t)\phi_i(t)dt\end{bmatrix}$$

$$f(\mathbf{a})+\sum_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\phi_i^*(t)dt\int_{-\infty}^{+\infty}x^*(t)\phi_i(t)dt=\sum_{i=1}^{N}\begin{bmatrix}\alpha_i\left[\alpha_i^*-\int x^*(t)\phi_i(t)dt\right]\\ -\int x(t)\phi_i^*(t)dt\left[\alpha_i^*-\int x^*(t)\phi_i(t)dt\right]\end{bmatrix}$$

$$f(\mathbf{a})+\sum_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\phi_i^*(t)dt\int_{-\infty}^{+\infty}x^*(t)\phi_i(t)dt=\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\alpha_i-\int x(t)\phi_i^*(t)dt\right)\left(\alpha_i^*-\int x^*(t)\phi_i(t)dt\right)\right]\text{donc}$$

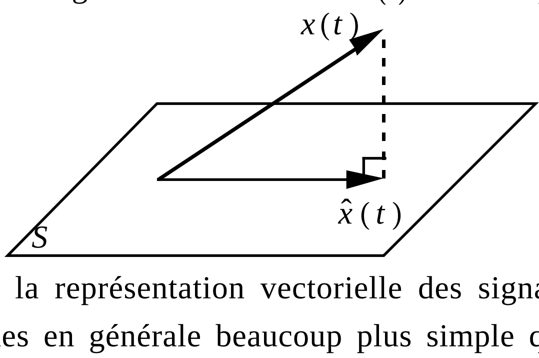
$$f(\mathbf{a})+\sum_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\phi_i^*(t)dt\int_{-\infty}^{+\infty}x^*(t)\phi_i(t)dt=\sum_{i=1}^{N}\left|\alpha_i-\int x(t)\phi_i^*(t)dt\right|^2\geq 0$$

Le minimum de $f(\mathbf{a})$ et donc de ε^2 est donc atteint lorsque $\sum_{i=1}^{N}\left|\alpha_i-\int x(t)\phi_i^*(t)dt\right|^2=0$ c'est à dire pour $\alpha_i=\int x(t)\phi_i^*(t)dt \qquad \forall\, 1\leq i\leq N$

2 - Dans ce cas $\varepsilon^2=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)-\hat{x}(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt-\sum_{i=1}^{N}|\alpha_i|^2$

<u>Remarque</u> :

Les résultats précédents peuvent s'interpréter de façon simple et géométrique de la façon suivante : En désignant par S l'espace (vectoriel) signal engendré par les $\phi_i(t) \quad (i=1,..,N)$, le problème revient à chercher le vecteur $\hat{x}(t)$ de cet espace le plus "proche" de $x(t)$. Il est clair que ce vecteur $\hat{x}(t)$ est obtenu en projetant orthogonalement le vecteur $x(t)$ sur cet espace S.



Cet exercice montre que la représentation vectorielle des signaux permet une approche géométrique des problèmes en générale beaucoup plus simple qu'une approche purement analytique.

Exercice IV.1

1 - A un instant t donné x(t) est une variable aléatoire déduite de ϕ par la transformation x(t) = a cos (ω_0t + ϕ). En appliquant le théorème de la moyenne (c.f. cours de Probabilités) $\mathrm{E}[\mathrm{x}(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{x}(t)\, \mathrm{f}_{\phi}(u)\, \mathrm{d}u$ en désignant par f_ϕ(u) la densité de probabilité de la V.A. ϕ.

ϕ étant supposée équirépartie sur [0,2π] $\quad \mathrm{f}_{\phi}(\mathrm{u}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & \text{si } \mathrm{u} \in [0\ ,\ 2\pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

d'où $\quad \mathrm{E}[\mathrm{x(t)}] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{x(t)}\, \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{a}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\omega_0 \mathrm{t} + u)\, \mathrm{d}u = 0$

La moyenne temporelle $\langle \mathrm{x(t)} \rangle = \lim\limits_{\mathrm{T}\to\infty} \dfrac{1}{\mathrm{T}} \displaystyle\int_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}} \mathrm{x}(t)\, \mathrm{d}t$

soit ici $\langle \mathrm{x(t)} \rangle = \lim\limits_{\mathrm{T}\to\infty} \left\{ \dfrac{1}{\mathrm{T}} \underbrace{\displaystyle\int_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}} \mathrm{a} \cos(\omega_0 t + \phi)\, \mathrm{d}t}_{\text{intégrale bornée}} \right\} = 0$

On constate que :

- E[x(t)] est indépendant de t donc le processus est stationnaire à l'ordre 1
- <x(t)> est indépendant de ϕ donc le processus est ergodique à l'ordre 1
- E[x(t)] = <x(t)>

2 - Toujours d'après le théorème de la moyenne $\mathrm{E}[\mathrm{x}(t)\mathrm{x}(t-\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{x}(t)\mathrm{x}(t-\tau)\mathrm{f}_{\phi}(u)\, \mathrm{d}u$

soit ici $\mathrm{E}[\mathrm{x(t)}\mathrm{x}(\mathrm{t}-\tau)] = \dfrac{\mathrm{a}^2}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(\omega_0 t + u)\cos(\omega_0(t-\tau) + u)\mathrm{d}u$

soit $\mathrm{E}[\mathrm{x(t)}\mathrm{x}(\mathrm{t}-\tau)] = \dfrac{\mathrm{a}^2}{4\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} [\cos(2\omega_0 \mathrm{t} - \omega_0\tau + 2u) + \cos(\omega_0\tau)]\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{a}^2}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\omega_0\tau)\mathrm{d}u$

soit enfin $\qquad \mathrm{E}[\mathrm{x(t)}\mathrm{x}(\mathrm{t}-\tau)] = \dfrac{\mathrm{a}^2}{2} \cos(\omega_0\tau)$

$$<\mathrm{x(t)x(t-}\tau)> = \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}} \mathrm{x}(t)\mathrm{x}(t - \tau)\, \mathrm{d}t$$

$$<\mathrm{x(t)x(t-}\tau)> = \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}} \frac{\mathrm{a}^2}{2}[\cos(2\omega_0 t - \omega_0\tau + 2\phi) + \cos(\omega_0\tau)]\, \mathrm{d}t$$

$$\langle x(t)x(t-\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\frac{a^2}{2}\left[\underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(2\omega_0 t - \omega_0\tau + 2\phi\right)\,dt}_{\text{intégrale bornée}} + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(\omega_0\tau\right)\,dt\right]$$

$$\langle x(t)x(t-\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\frac{a^2}{2}\,T\cos\left(\omega_0\tau\right)$$

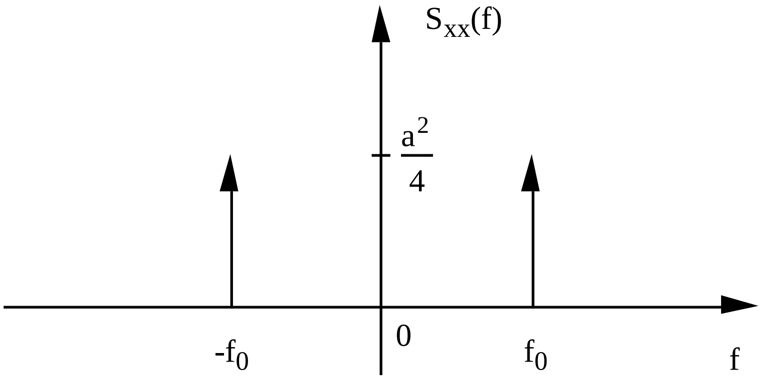
$$\langle x(t)x(t-\tau)\rangle = \frac{a^2}{2}\cos\left(\omega_0\tau\right)$$

On remarque que :

- $E[x(t)x(t-\tau)]$ est indépendant de t donc le processus est stationnaire à l'ordre 2.
- $\langle x(t)x(t-\tau)\rangle$ est indépendant de ϕ donc le processus est ergodique à l'ordre 2.
- $E[x(t)x(t-\tau)] = \langle x(t)x(t-\tau)\rangle$ (théorème de Birkhoff)

3 - La densité spectrale de puissance du processus $S_{xx}(f)$ est égale à la TF de sa fonction d'autocorrélation $R_{xx}(\tau) = E[x(t)x(t-\tau)]$.

Donc $S_{xx}(f) = TF\left[\frac{a^2}{2}\cos\left(\omega_0\tau\right)\right] = \frac{a^2}{4}\left\{\delta\left(f-f_0\right)+\delta\left(f+f_0\right)\right\}$ en posant $\omega_0 = 2\pi f_0$



La puissance totale du signal est $P = R_{xx}(0) = \frac{a^2}{2}$

On retrouve bien $P = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f)\,df = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$

Exercice IV.2

1 - $E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, f_{\phi}(u)\,du$ en désignant par $f_{\phi}(u)$ la densité de probabilité de la V.A. ϕ.

ϕ étant supposée équirépartie sur $[0,\pi/2]$ $f_\phi(u) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} & \text{si } u \in \left[0\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

d'où

$$E[x(t)] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\,du = \frac{2a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\omega_0 t + u)\,du = \frac{2a}{\pi}\left[\sin(\omega_0 t + u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left\{\cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t)\right\}$$

$$R_{xx}(t,\tau) = E[x(t)x(t-\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t-\tau)f_\phi(u)\,du$$

soit ici $R_{xx}(t,\tau) = \dfrac{2a^2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\omega_0 t + u)\cos(\omega_0(t-\tau) + u)\,du$

$$R_{xx}(t,\tau) = \frac{a^2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos(2\omega_0 t - \omega_0\tau + 2u) + \cos(\omega_0\tau)\right]du$$

$$= \frac{a^2}{2}\cos(\omega_0\tau) + \frac{a^2}{2\pi}\left[\sin(2\omega_0 t - \omega_0\tau + 2u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

soit enfin $R_{xx}(t,\tau) = \dfrac{a^2}{2}\cos(\omega_0\tau) - \dfrac{a^2}{\pi}\sin(2\omega_0 t - \omega_0\tau)$

2 - On remarque que $E[x(t)]$ ainsi que $R_{xx}(t,\tau)$ dépendent du temps. Le processus n'est donc pas stationnaire au sens large ni même à l'ordre 1.

Exercice IV.3

Le processus x(t) étant supposé stationnaire d'ordre 2

$$E\left[\{x(t+\tau) \pm x(t)\}^2\right] = E\left[x^2(t+\tau) + x^2(t) \pm 2x(t+\tau)x(t)\right]$$

$$= E\left[x^2(t+\tau)\right] + E\left[x^2(t)\right] \pm 2E[x(t+\tau)x(t)]$$

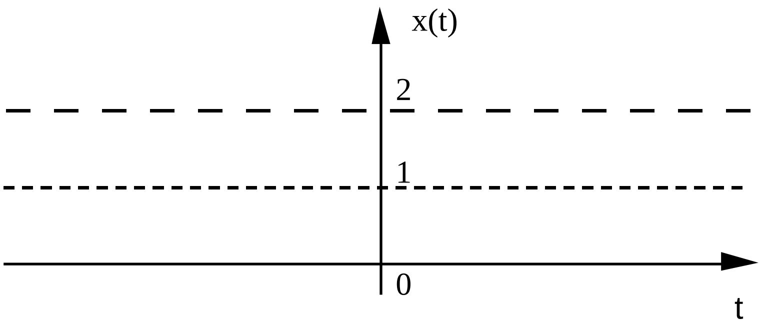
et, en particulier, $R_{xx}(0) = E\left[x^2(t)\right] = E\left[x^2(t+\tau)\right]$

d'autre part $E\left[\{x(t+\tau) \pm x(t)\}^2\right] \geq 0$ donc $2\,R_{xx}(0) \pm 2\,R_{xx}(\tau) \geq 0$

d'où $R_{xx}(0) \geq |R_{xx}(\tau)|$

Exercice IV.4

Le processus ne comporte que deux trajectoires :



$$E[x(t)] = \sum_i p_i x_i = (+1)p + (+2)(1-p) = 2 - p$$ donc indépendant de t.

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt = a = \begin{cases} +1 \\ \text{ou} \\ +2 \end{cases}$$ selon la trajectoire.

$$E[x(t)x(t-\tau)] = E\left[x^2(t)\right] = \sum_i p_i x_i^2$$ car, sur une trajectoire, $x(t) = x(t-\tau)$.

donc $E[x(t)x(t-\tau)] = (1)^2p + (2)^2(1-p) = 4 - 3p$ (indépendant de t).

$$\langle x(t)x(t-\tau) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t-\tau)dt = a^2 = \begin{cases} +1 \\ \text{ou} \\ +4 \end{cases}$$ selon la trajectoire.

Le processus est donc stationnaire à l'ordre 2 mais pas ergodique.

Exercice IV.5

1 - $E[x(t)] = 1.\ P\{x(t)=1\} + 0.P\{x(t)=0\}$

$$P\{x(t)=1\} = P\Big[\{x(0)=1\} \text{ et } \{\text{nb. pair de transitions sur } [0,t]\}\Big]$$

$$+ P\Big[\{x(0)=0\} \text{ et } \{\text{nb. impair de transitions sur } [0,t]\}\Big]$$

Or le nombre de transitions sur [0,t] est indépendant de la valeur du processus en 0.

$$P\{x(t)=1\} = p.\,P\Big[\,\{\text{nb. impair de transitions sur } [0,t]\}\,\Big]$$

$$+(1-p).\,P\Big[\,\{\text{nb. pair de transitions sur } [0,t]\}\,\Big]$$

$$P\{x(t)=1\} = p\,.\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k)!} + (1-p)\,.\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

d'où $\quad E[x(t)] = e^{-\lambda t}\big[p.\mathrm{sh}(\lambda t) + (1-p).\mathrm{ch}(\lambda t)\big]$

$$E[x(t)] = \frac{e^{-\lambda t}}{2}\Big[p\big(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}\big) + (1-p)\big(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}\big)\Big]$$

$$E[x(t)] = \frac{1}{2}\Big[p\big(1 - e^{-\lambda t}\big) + (1-p)\big(1 + e^{-\lambda t}\big)\Big]$$

Le processus est stationnaire au 1° ordre ssi E[x(t)] = cte , soit si $p\,e^{-\lambda t} = (1-p)\,e^{-\lambda t}$, soit en définitive si $p = \frac{1}{2}$.

Dans ce cas $E[x(t)] = P\{x(t)=1\} = \frac{1}{2} = P\{x(t)=0\}$.

2 - Calculons la fonction d'autocorrélation du processus.

$$R_{xx}(t,\tau) = E[x(t)x(t-\tau)] = (1)(1)P\big[\{x(t)=1\} \cap \{x(t-\tau)=1\}\big]$$

$$= P\Big[\{x(t-\tau)=1\} \big/ \{x(t)=1\}\Big]\,\underbrace{P\big[\{x(t)=1\}\big]}_{\frac{1}{2}}$$

et

$$P\Big[\{x(t-\tau)=1\} \big/ \{x(t)=1\}\Big] = P\big[\text{nb. pair de transitions sur } [t-\tau, t]\big]$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda|\tau|}\,\frac{(\lambda|\tau|)^{2k}}{(2k)!} = e^{-\lambda|\tau|}\,\mathrm{ch}(\lambda|\tau|)$$

d'où

$$R_{xx}(t,\tau) = \frac{1}{2}e^{-\lambda|\tau|}\,\mathrm{ch}(\lambda|\tau|) = \frac{1}{2}e^{-\lambda|\tau|}\left[\frac{e^{\lambda|\tau|} + e^{-\lambda|\tau|}}{2}\right]$$

soit en définitive

$$\boxed{R_{xx}(t,\tau) = \frac{1}{4}\left[1 + e^{-2\lambda|\tau|}\right]}$$

Le processus étant par hypothèse stationnaire au 1° ordre et R_{xx} étant indépendant de t, le processus est donc stationnaire au 2° ordre.

$S_{xx}(f)$, la densité spectrale du processus est égale à $TF[R_{xx}(\tau)]$.

Calculons tout d'abord la TF de $e^{-2\lambda|\tau|}$.

$$\mathrm{TF}\left[e^{-\lambda|\tau|}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\lambda|\tau|}\, e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau = \int_{-\infty}^{0} e^{2\lambda\tau}\, e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau + \int_{0}^{+\infty} e^{-2\lambda\tau}\, e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau$$

$$= \left[\frac{e^{\tau[2\lambda - i2\pi f]}}{2\lambda - i2\pi f}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{\tau[-2\lambda - i2\pi f]}}{-2\lambda - i2\pi f}\right]_{0}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2\lambda - i2\pi f} + \frac{1}{2\lambda + i2\pi f} = \frac{4\lambda}{4\lambda^2 + 4\pi^2 f^2}$$

d'où

$$\boxed{S_{xx}(f) = \frac{1}{4}\left[\delta(f) + \frac{\lambda}{\lambda^2 + \pi^2 f^2}\right]}$$

Par ailleurs, la puissance du processus est $P = R_{xx}(0) = \frac{1}{2}$

Exercice IV.6

1 - $E[b_k] = 1.p + 0.(1-p) = p$

2 - $E[a_k] = 1.P\{a_k=1\} + 0.P\{a_k=0\} = P\{a_k=1\}$

Or $a_k=1$ ssi $\{a_{k-1}=1$ et $b_k=0\}$ ou $\{a_{k-1}=0$ et $b_k=1\}$ donc

$P\{a_k=1\}= P\{a_{k-1}=1$ et $b_k=0\} + P\{a_{k-1}=0$ et $b_k=1\}$

or, les évènements $\{a_{k-1}=x\}$ et $\{b_k=y\}$ sont indépendants donc

$$\begin{aligned} P\{a_k=1\}= E[a_k] &= P\{a_{k-1}=1\}P\{b_k=0\} + P\{a_{k-1}=0\}P\{b_k=1\} \\ &= P\{a_{k-1}=1\}(1-p) + P\{a_{k-1}=0\}p \\ &= E[a_{k-1}](1-p) + (1 - E[a_{k-1}])p \qquad [1] \end{aligned}$$

Par ailleurs, on suppose que la suite $\{a_k\}$ est stationnaire

Remarque : On montre en fait que cette propriété n'est obtenue que si a_0 est équiprobable ou sinon que de façon asymptotique, i.e. pour k suffisamment grand.

Donc $E[a_k] = E[a_{k-1}]$

et $E[a_k] = E[a_k](1-p) + (1 - E[a_k])p$ d'après [1]

d'où $E[a_k] = \frac{1}{2} = P\{a_k=1\} = P\{a_k=0\}$

En conclusion les a_k sont distribués de façon **équiprobable** même si les b_k ne le sont pas.

Exercice IV.7

1 - $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, g(t - kT - \theta)$

$$E[x(t)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E[a_k]\, E[g(t - kT - \theta)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} m_a \frac{1}{T}\int_0^T g(t - kT - \theta)\, d\theta$$ (grâce au théorème de la moyenne).

posons u = t - kT$_S$ -θ du = -dθ

$$E[x(t)] = \frac{m_a}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{t-(k+1)T}^{t-T} g(u)\, du = \frac{m_a}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\, du = \frac{m_a}{T} G(0)$$

E[x(t)] = cte donc x(t) est stationnaire à l'ordre 1.

2 - $E[x(t)x(t-\tau)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} E[a_k a_l]\, E[g(t - kT - \theta)\, g(t - \tau - lT - \theta)]$, posons l = k + n

$$E[x(t)x(t-\tau)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_a(n)\, E[g(t - kT - \theta)\, g(t - \tau - kT - nT - \theta)]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_a(n) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T g(t - kT - \theta)\, g(t - \tau - kT - nT - \theta)\, d\theta$$

posons u = t - kT$_S$ -θ

$$E[x(t)x(t-\tau)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_a(n) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\int_{t-(k+1)T}^{t-kT} g(u)\, g(u - \tau - nT)\, du$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_a(n) R_{gg}(\tau + nT)$$

$$= \frac{1}{T} R_{gg}(\tau) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_a(n)\, \delta(\tau + nT)$$

donc

$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} R_{gg}(\tau) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_a(n)\, \delta(\tau + nT)$ est indépendant de t et par suite le processus x(t) est stationnaire au sens large.

3 - Comme on vient de le montrer, le processus *x*(*t*) est donc stationnaire au sens large.

4 - $R_a(0) = E[a_k^2] = \sigma_a^2 + m_a^2$

$R_a(n) = E[a_k a_{k+n}] = E[a_k]\, E[a_{k+n}] = m_a^2$ car les a_k sont 2 à 2 indépendantes.

5 - Donc si es a_k sont 2 à 2 indépendantes.

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} R_{gg}(\tau) * \left[\sigma_a^2 \delta(\tau) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} m_a^2\, \delta(\tau + nT)\right]$$

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} R_{gg}(\tau) * \left[m_a^2\, \mathrm{CC}\ (\tau_T) + \sigma_a^2 \delta(\tau)\right]$$

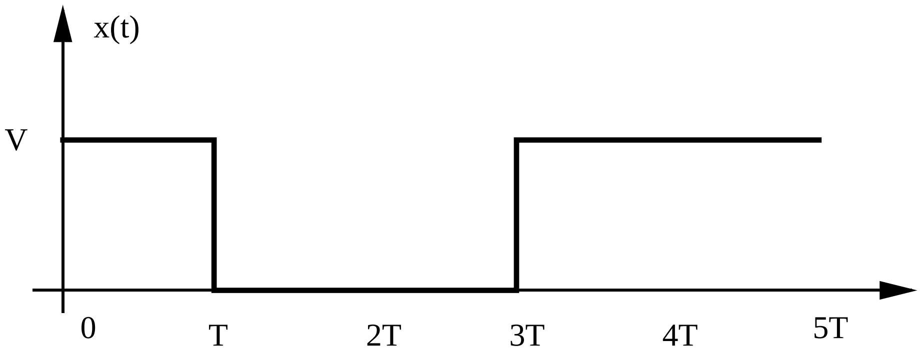
On en déduit, grâce au théorème de Wiener-Kintchine, la densité spectrale de puissance de *x*(*t*) :

$$S_{xx}(f) = \frac{1}{T} S_{gg}(f) \cdot \left[\frac{m_a^2}{T} \text{CC}_{\frac{1}{T}}(f) + \sigma_a^2 \right]$$

B

I - Signal binaire NRZ.

1 -



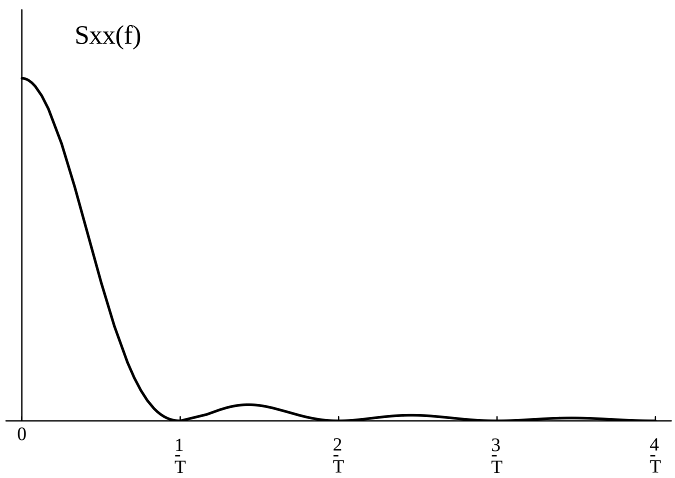
2 -

$$g(t) = \mathrm{V} \prod_T \left(t - \frac{T}{2} \right) \Rightarrow G(f) = \mathrm{V}T \operatorname{sinc}(\pi f T) e^{-i\pi f T} \Rightarrow S_{gg}(f) = \left| G(f) \right|^2 = \mathrm{V}^2 T^2 \operatorname{sinc}^2(\pi f T)$$

$$m_a = \mathrm{E}[a_k] = \mathrm{p}$$

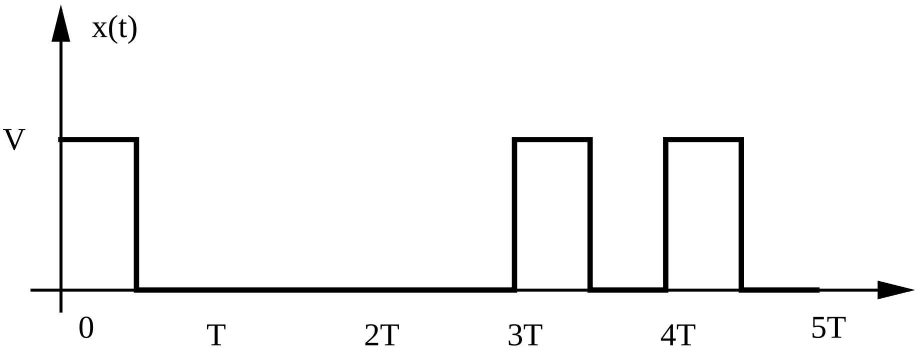
$$\sigma_{\mathrm{a}}^2 = \mathrm{E}[a_k^2] - \mathrm{E}^2[a_k] = \mathrm{p} - \mathrm{p}^2 = \mathrm{p}(1-\mathrm{p})$$

$$S_{xx}(f) = \mathrm{V}^2 T \operatorname{sinc}^2(\pi f T) \cdot \left[\frac{\mathrm{p}}{T} \text{CC}_{\frac{1}{T}}(f) + \mathrm{p}(1-\mathrm{p}) \right]$$



II - Signal binaire RZ 50%.

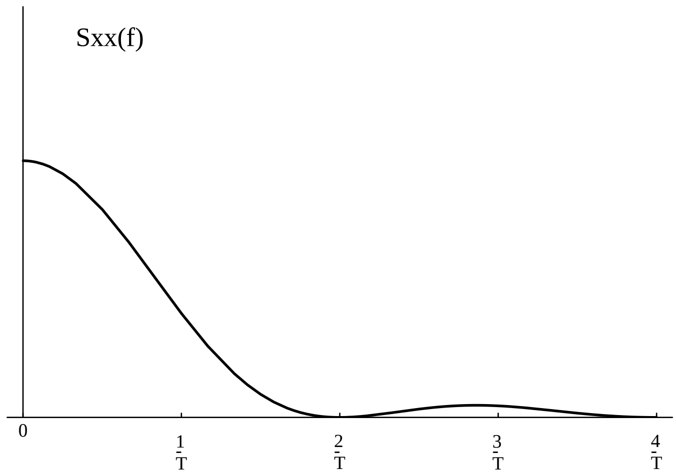
1 -



2 -

$$g(t) = \mathrm{V}\prod_{\frac{T}{2}}\left(t - \frac{T}{4}\right) \Rightarrow G(f) = \frac{\mathrm{V}T}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi f T}{2}\right)e^{-i\pi f\frac{T}{2}} \Rightarrow S_{gg}(f) = \left|G(f)\right|^2 = \frac{\mathrm{V}^2T^2}{4}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi f T}{2}\right)$$

$$S_{xx}(f) = \frac{\mathrm{V}^2T}{4}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi f T}{2}\right)\cdot\left[\frac{\mathrm{p}}{T}\mathrm{CC}_{\frac{1}{T}}(f) + \mathrm{p}(1-\mathrm{p})\right]$$



Exercice IV.8

$$\varepsilon(\lambda) = \mathrm{E}\left[\left\{x(t_0+\theta) - \lambda x(t_0)\right\}^2\right]$$

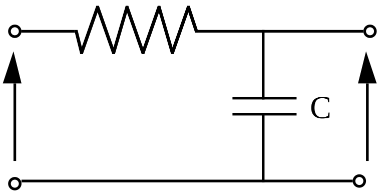
$$\varepsilon(\lambda) = \mathrm{E}\left[x(t_0+\theta)^2\right] - 2\lambda\,\mathrm{E}\left[x(t_0+\theta)x(t_0)\right] + \lambda^2\,\mathrm{E}\left[x(t_0)^2\right]$$

$$\varepsilon(\lambda) = R_{xx}(0) - 2\lambda R_{xx}(\theta) + \lambda^2 R_{xx}(0)$$

$$\frac{d\varepsilon(\lambda)}{d\lambda} = 2\lambda R_{xx}(0) - 2R_{xx}(\theta)$$

$\varepsilon(\lambda)$ est donc minimum pour $\lambda_0 = \dfrac{R_{xx}(\theta)}{R_{xx}(0)}$ et dans ce cas $\tilde{x}(t_0 + \theta) = \dfrac{R_{xx}(\theta)}{R_{xx}(0)} x(t_0)$

Exercice V.1



1 - x(t) = R i(t) + y(t)

$$y(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad i(t) = C\,\frac{dy(t)}{dt}$$

$$x(t) = RC\,\frac{dy(t)}{dt} + y(t) \quad \xrightarrow{TF} \quad X(f) = 2i\pi f\,RC\,Y(f) + Y(f)$$

La fonction de transfert du filtre est $H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$ soit

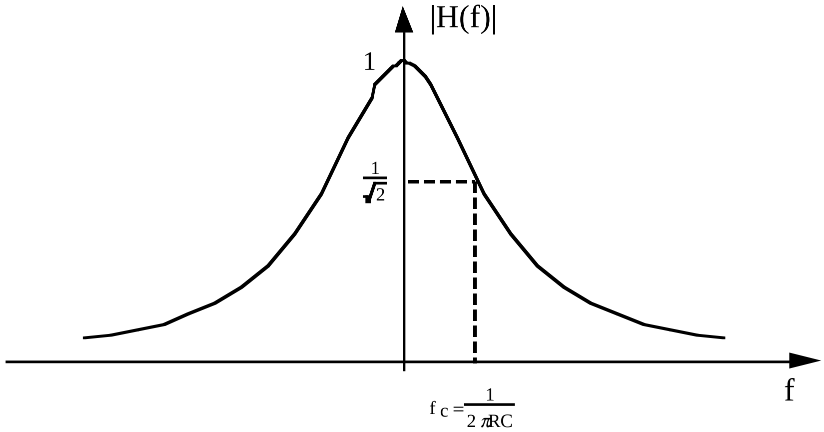
$$H(f) = \frac{1}{1 + 2i\pi fRC} = \frac{1}{1 + i\,\frac{f}{f_c}}$$

$$TF^{-1}\left[\frac{1}{\alpha + 2i\pi f}\right] = u(t)e^{-\alpha t} \quad \text{et} \quad h(t) = TF^{-1}\left[H(f)\right]$$

$$H(f) = \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC} + 2i\pi f} \quad \Rightarrow \quad h(t) = \frac{1}{RC}u(t)e^{-\frac{t}{RC}}$$

2 - Pour trouver la nature du filtre, on va calculer |H(f)|.

$$\left|H(f)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 f^2 R^2 C^2}}$$



Il s'agit d'un filtre passe-bas.

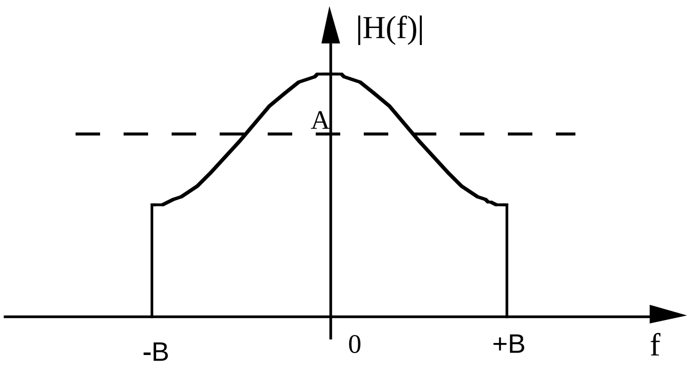
La réponse impulsionnelle du filtre étant causale, le filtre l'est aussi.

Ce filtre est-il stable ?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| \, dt = \frac{1}{RC} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{RC}} \, dt = 1 \quad < +\infty$$ donc le filtre est stable

Exercice V.2

Dessinons tout d'abord le module de la fonction de transfert du filtre.



|H(f)| n'étant pas constant sur la bande [-B,+B], ce filtre n'est donc pas un filtre passe-bas idéal.
Calculons l'expression du signal de sortie y(t) en fonction du signal d'entrée x(t).

<u>Remarques préliminaires</u> :

- Le filtre étant caractérisé par sa fonction de transfert, donc dans le domaine fréquentiel, c'est dans ce domaine qu'il est préférable de commencer le calcul.

- Hormis le fait que son support fréquentiel soit borné (bande [-B,+B]), le signal x(t) est supposé quelconque. Nous supposerons, dans un souci de simplification, que ce signal possède une TF X(f).Il en ira donc de même pour le signal de sortie et nous noterons Y(f) sa TF.

- Le fait que le support fréquentiel de x(t) soit borné peut se traduire mathématiquement par la relation : $X(f) = X(f) \prod_{2B}(f)$. Cette remarque étant également valable pour H(f).

$$
\begin{aligned}
Y(f) = H(f)X(f) &= \left(A + \alpha \cos\frac{\pi f}{B}\right)e^{-2i\pi f t_0} \prod_{2B}(f)\ \ X(f)\prod_{2B}(f) \\
&= \left(A + \alpha \cos\frac{\pi f}{B}\right)e^{-2i\pi f t_0}\ \ X(f)\prod_{2B}(f) = \left(A + \alpha \cos\frac{\pi f}{B}\right)e^{-2i\pi f t_0}\ \ X(f) \\
&= A\, e^{-2i\pi f t_0} X(f) + \frac{\alpha}{2} e^{i\pi\frac{f}{B}} e^{-2i\pi f t_0} X(f) + \frac{\alpha}{2} e^{-i\pi\frac{f}{B}} e^{-2i\pi f t_0} X(f) \\
&= A\, e^{-2i\pi f t_0} X(f) + \frac{\alpha}{2} e^{-2i\pi f\left(t_0 - \frac{1}{2B}\right)} X(f) + \frac{\alpha}{2} e^{-2i\pi f\left(t_0 + \frac{1}{2B}\right)} X(f)
\end{aligned}
$$

sachant que $TF^{-1}\left[e^{-2i\pi f a}\ X(f)\right] = x(t-a)$

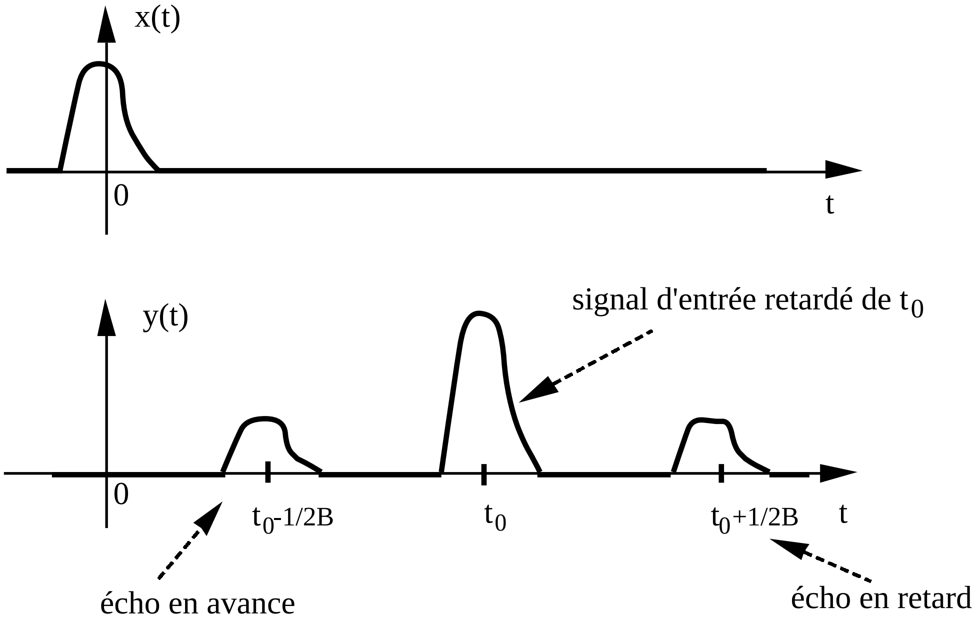
$$\boxed{y(t) = A\ x\left(t - t_0\right) + \frac{\alpha}{2} x\left(t - t_0 + \frac{1}{2B}\right) + \frac{\alpha}{2} x\left(t - t_0 - \frac{1}{2B}\right)}$$

Interprétation (cf. schéma ci-dessous):

- Le terme A $x(t-t_0)$ représente la partie principale de signal d'entrée retardée de t_0 (ce que l'on aurait obtenu en sortie d'un passe-bas idéal).

- Le terme $\frac{\alpha}{2} x\left(t - t_0 + \frac{1}{2B}\right)$ représente un "écho en avance".

- Le terme $\frac{\alpha}{2} x\left(t - t_0 - \frac{1}{2B}\right)$ un "écho en retard"



La distorsion du signal d'entrée introduite par le filtre consiste donc en l'ajout de ces deux "échos".

Exercice V.3

Calculons la fonction de transfert H(f) du canal.

$$y(t) = A\ x(t - t_0) + a\ x(t - t_1) \quad \Rightarrow \quad Y(f) = A\ e^{-i2\pi f t_0}\ X(f) + \alpha\ e^{-i2\pi f t_1}\ X(f)$$

$$\text{et}\ \ H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \quad \Rightarrow \quad H(f) = A\ e^{-i2\pi f t_0} + \alpha\ e^{-i2\pi f t_1}$$

$$\begin{aligned}|H(f)|^2 &= H(f)\overline{H(f)} = \left(A\ e^{-i2\pi f t_0} + \alpha\ e^{-i2\pi f t_1}\right)\left(A\ e^{i2\pi f t_0} + \alpha\ e^{i2\pi f t_1}\right)\\ &= A^2 + \alpha^2 + A\alpha\left(e^{i2\pi f(t_1 - t_0)} + e^{-i2\pi f(t_1 - t_0)}\right)\\ &= A^2 + \alpha^2 + 2A\alpha\cos 2\pi f(t_1 - t_0)\end{aligned}$$

or $\alpha << A$ donc

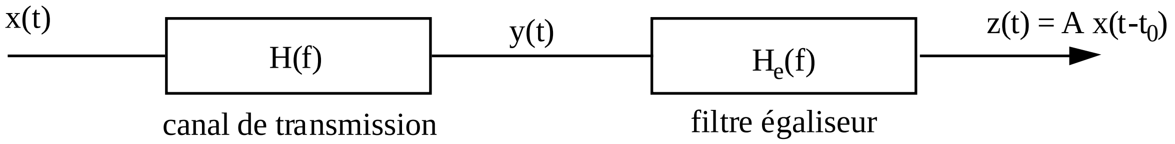
$$|H(f)|^2 \cong A^2\left(1 + \frac{2\alpha}{A}\cos 2\pi f(t_1 - t_0)\right) \quad \text{et}$$

$$|H(f)| \cong A\left(1 + \frac{\alpha}{A}\cos 2\pi f(t_1 - t_0)\right)$$

$$|H(f)| = A + \alpha\cos 2\pi f(t_1 - t_0)$$

Le module de la fonction de transfert présente une distorsion d'amplitude (amplitude non constante en fonction de la fréquence) qui se traduit par une distorsion du signal transmis.

Nous allons essayer de compenser cette distorsion à l'aide d'un filtre égaliseur de façon à ce que le filtre global (canal + égaliseur) corresponde à un filtre idéal.

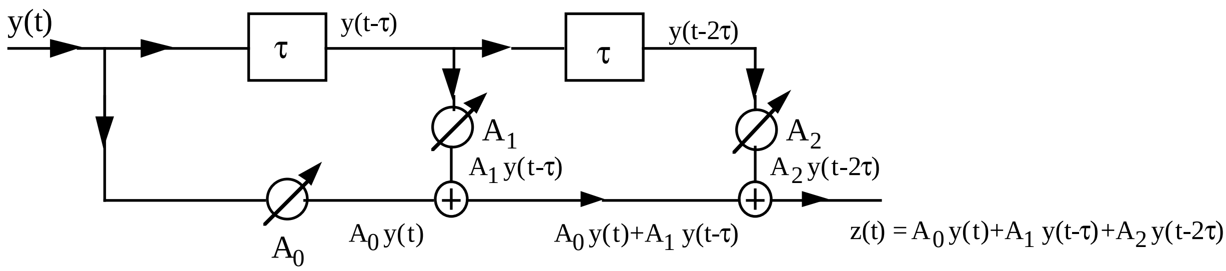


$$\left.\begin{array}{l} Z(f) = A\ e^{-2i\pi f t_0} X(f) \\ Z(f) = H(f) H_e(f) X(f) \end{array}\right\} \Rightarrow\ H_e(f) = \frac{A\ e^{-2i\pi f t_0}}{H(f)} = \frac{A\ e^{-2i\pi f t_0}}{A\ e^{-2i\pi f t_0} + \alpha\, e^{-2i\pi f t_1}} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{A}\ e^{-2i\pi f (t_1 - t_0)}}$$

On peut

$$H_e(f) = 1 - \frac{\alpha}{A}\ e^{-2i\pi f (t_1 - t_0)} + \frac{\alpha^2}{A^2}\ e^{-4i\pi f (t_1 - t_0)} + \ldots\ldots$$

réaliser cette égalisation grâce à un filtre transverse :



$z(t) = A_0\ y(t) + A_1\ y(t-\tau) + A_2\ y(t-2\tau)$

$Z(f) = A_0\ Y(f) + A_1\ e^{-2i\pi f\tau}\ Y(f) + A_2\ e^{-4i\pi f\tau}\ Y(f) = H_e(f)\ Y(f)$

donc $H_e(f) = A_0 + A_1\ e^{-2i\pi f\tau} + A_2\ e^{-4i\pi f\tau}$

Pour réaliser l'égalisation à l'aide d'un filtre transverse, il faudra prendre :

$A_0 = 1$ $\qquad A_1 = -\frac{\alpha}{A}$ $\qquad A_2 = -\frac{\alpha^2}{A^2}$ $\qquad \tau = t_1 - t_0$

Exercice VI.1

1 - $X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{-i2\pi ft}\,dt = \frac{A}{T}\int_{-T}^{+T} t\ e^{-i2\pi ft}\,dt$

intégrons par parties en posant :

$u = t \qquad du = dt$

$dv = e^{-i2\pi ft}dt \qquad v = -\frac{1}{2i\pi f}e^{-i2\pi ft} \quad (f \neq 0)$

$$X(f)=\frac{A}{T}\left[-\frac{1}{2i\pi f}\left[t\ e^{-2i\pi ft}\right]_{-T}^{+T}+\left(\frac{1}{2i\pi f}\right)\left(-\frac{1}{2i\pi f}\right)\left[\ e^{-2i\pi ft}\right]_{-T}^{+T}\right]$$

$$X(f)=\frac{A}{T}\left[-\frac{T\cos 2\pi fT}{i\pi f}+\frac{\sin 2\pi fT}{2i\pi f\,\pi f}\right]$$

$$X(f)=\frac{A}{i\pi f}\left[S\text{inc}\,2\pi fT-\cos 2\pi fT\right]$$

et $X(0)=\frac{A}{T}\int_{-T}^{+T} t\ dt = 0$

2 - $y(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty} x(t-2kT)$

soit $y(t) = x(t) * ⨿⨿_{2T}(t)$ avec $⨿⨿_{2T}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-2kT)$

$$Y(f)=X(f)\,\frac{1}{2T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{k}{2T}\right)=\frac{1}{2T}\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{+\infty}X\left(\frac{k}{2T}\right)\delta\left(f-\frac{k}{2T}\right)$$

$$Y(f)=\frac{1}{2T}\sum_{k\neq 0}\left[\frac{A}{i\pi\frac{k}{2T}}\left[\underbrace{s\,\text{inc}\left(2\pi\frac{k}{2T}T\right)}_{=0}-\underbrace{\cos\left(2\pi\frac{k}{2T}T\right)}_{=(-1)^k}\right]\delta\left(f-\frac{k}{2T}\right)\right]$$

soit $\boxed{Y(f)=\sum_{k\neq 0}\frac{A}{i\pi k}(-1)^{k+1}\,\delta\left(f-\frac{k}{2T}\right)}$ Y(f) est donc un imaginaire pur.

3 - $f_c=\frac{3}{T}$ et $B=\frac{1}{3T} \Rightarrow f_c-B=\frac{8}{3T}$ et $f_c+B=\frac{10}{3T}$

Le filtre ne va donc "laisser passer" que les raies situées en $f=\frac{3}{T}$ et $f=-\frac{3}{T}$ c'est à dire l'harmonique d'ordre k=6.

Donc $Z(f)=\frac{A}{6i\pi}\left\{\delta\left(f+\frac{3}{T}\right)-\delta\left(f-\frac{3}{T}\right)\right\}=-\frac{A}{3\pi}\ TF\left[\sin 2\pi\frac{3}{T}t\right]$

d'où $z(t) = -\frac{A}{3\pi}\sin\frac{6\pi t}{T}$

Exercice VI.2

A l'entrée du filtre RC, de réponse impulsionnelle h(t), on présente le signal :

x(t) = e(t) + b(t)

A la sortie du filtre on obtient donc :

y(t) = x(t) ∗ h(t) = [e(t) ∗ h(t)] + [b(t) ∗ h(t)] = e'(t) + b'(t)

Calculons $S_{yy}(f)$: la DSP de y(t).

$S_{yy}(f) = TF[R_{yy}(\tau)]$

et $R_{yy}(\tau) = E[y(t)y(t-\tau)]$

$R_{yy}(\tau) = E[e'(t)e'(t-\tau)] + E[b'(t)b'(t-\tau)] + E[e'(t)b'(t-\tau)] + E[b'(t)e'(t-\tau)]$.

Or e(t) et b(t) sont des processus indépendants, par suite les processus e'(t) et b'(t) le sont également donc $E[e'(t)b'(t-\tau)] = E[e'(t)]\,E[b'(t-\tau)]$

et $E[b'(t)e'(t-\tau)] = E[b'(t)]\,E[e'(t-\tau)]$.

D'autre part b(t) est centré (E[b(t)] = 0) donc b'(t) l'est aussi

donc $E[b'(t)] = E[b'(t-\tau)] = 0$.

En définitive : $E[e'(t)b'(t-\tau)] = E[b'(t)e'(t-\tau)] = 0$ (les termes croisés disparaissent) et

$R_{yy}(\tau) = E[e'(t)e'(t-\tau)] + E[b'(t)b'(t-\tau)] = R_{e'e'}(\tau) + R_{b'b'}(\tau)$ d'où

$S_{yy}(f) = S_{e'e'}(f) + S_{b'b'}(f)$.

$S_{e'e'}(f)$ représente la DSP du signal utile dans le signal de sortie et $S_{b'b'}(f)$ la DSP du bruit dans ce même signal.

$S_{e'e'}(f) = S_{ee}(f)\,|H(f)|^2$

$$S_{e'e'}(f) = \frac{A^2}{4}\left\{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right\}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}\right] \qquad avec\ f_0 = f_c$$

$$S_{e'e'}(f) = \frac{A^2}{8}\left\{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right\}$$

d' où, puissance du signal utile $P_{e'} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{e'e'}(f)\,df = \frac{A^2}{4}$

de façon analogue :

$S_{b'b'}(f) = S_{bb}(f)\ |H(f)|^2 = \dfrac{N_0}{2}\left[\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{f}{f_c}\right)^2}\right]$

d'où, puissance de bruit $P_{b'} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{b'b'}(f)\, df = \dfrac{N_0}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{f}{f_c}\right)^2} df = \dfrac{N_0}{4RC}$

en définitive : $\boxed{\left(\dfrac{S}{B}\right)_{\text{sortie}} = \dfrac{A^2RC}{N_0}}$

Exercice VI.3

1 - $y(t) = \int_{t-T}^{t} x(u)du$

Essayons de mettre $y(t)$ sous la forme d'un produit de convolution. Il s'agit donc de trouver une fonction h telle que $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du$.

Par identification h est telle que :

$$h(t-u) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t - T < u < t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

soit $$h(t-u) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < t-u < T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Posons $t' = t-u$

$$h(t') = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < t' < T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En définitive la fonction h cherchée est donc : $\boxed{h(t) = \prod_{\mathrm{T}}\left(t - \dfrac{T}{2}\right)}$

$h(t) = 0$ pour $t<0$ le filtre est donc **causal**.

$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt = \int_0^T 1\, dt = T$ le filtre est donc **stable**.

2 - $S_{yy}(f) = S_{xx}(f)\,|H(f)|^2$

$S_{xx}(f) = \dfrac{A^2}{4}\{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\} + \dfrac{N_0}{2}$ (cf. corrigé de l'exercice 5)

Calculons $|H(f)|^2$

$$h(t)=\prod\nolimits_{\mathrm{T}}\left(t-\frac{T}{2}\right) \qquad \text{donc } \left|H(f)\right|=T\,\mathrm{sinc}(\pi fT) \text{ et } \left|H(f)\right|^2=T^2\,\mathrm{sinc}^2(\pi fT)$$

donc

$$S_{yy}(f)=T^2\,\mathrm{sinc}^2(\pi fT)\left[\frac{\mathrm{N}_0}{2}+\frac{A^2}{4}\delta(f-f_0)+\frac{A^2}{4}\delta(f+f_0)\right]$$

$$S_{yy}(f)=\frac{\mathrm{N}_0T^2}{2}\mathrm{sinc}^2(\pi fT)+\frac{A^2}{4}\mathrm{sinc}^2(\pi fT)\delta(f-f_0)+\frac{A^2}{4}\mathrm{sinc}^2(\pi fT)\delta(f+f_0)$$

$$S_{yy}(f)=\frac{\mathrm{N}_0T^2}{2}\mathrm{sinc}^2(\pi fT)+\frac{A^2}{4}\mathrm{sinc}^2(\pi f_0T)\delta(f-f_0)+\frac{A^2}{4}\mathrm{sinc}^2(-\pi f_0T)\delta(f+f_0)$$

soit en définitive :

$$\boxed{S_{yy}(f)=\frac{\mathrm{N}_0T^2}{2}\mathrm{sinc}^2(\pi fT)+\frac{A^2}{4}\mathrm{sinc}^2(\pi f_0T)\delta(f-f_0)+\frac{A^2}{4}\mathrm{sinc}^2(\pi f_0T)\delta(f+f_0)}$$

3 -

$$R_{yy}(\tau)=\mathrm{TF}^{-1}\left[S_{yy}(f)\right]$$

$$R_{yy}(\tau)=\frac{\mathrm{N}_0\,T^2}{2}\mathrm{TF}^{-1}\left[\mathrm{sinc}^2(\pi fT)\right]+\frac{A^2T^2}{2}\mathrm{sinc}^2(\pi f_0T)\,\mathrm{TF}^{-1}\left[\frac{1}{2}\left\{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right\}\right]$$

$$R_{yy}(\tau)=\frac{\mathrm{N}_0\,T}{2}\Lambda_{2T}(\tau)+\frac{A^2T^2}{2}\mathrm{sinc}^2(\pi f_0T)\cos(2\pi f_0\tau)$$

$$\boxed{R_{yy}(\tau)=\frac{\mathrm{N}_0\,T}{2}\Lambda_{2T}(\tau)+\frac{A^2T^2}{2}\mathrm{sinc}^2(\pi f_0T)\cos(2\pi f_0\tau)}$$

4 - 1ère méthode :

$$\mathrm{P}_y=R_{yy}(0)=\frac{\mathrm{N}_0T}{2}+\frac{A^2T^2}{2}\mathrm{sinc}^2(\pi f_0T)$$

2ème méthode :

$$\mathrm{P}_y=\int_{-\infty}^{+\infty}S_{yy}(f)\,df$$

$$\mathrm{P}_y=\frac{\mathrm{N}_0T^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}^2(\pi fT)\,df+\frac{A^2T^2}{4}\mathrm{sinc}^2(\pi f_0T)\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(f-f_0)\,df}_{=1}+\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(f+f_0)\,df}_{=1}\right]$$

Or d'après le théorème de Parseval :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}^2(\pi fT)\,df=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T^2}\Pi_T^2(t)\,dt=\frac{1}{T}$$

donc $\mathrm{P}_y=\dfrac{\mathrm{N}_0T}{2}+\dfrac{A^2T^2}{2}\mathrm{sinc}^2(\pi f_0T)$

Exercice VI.4

1 - $h(t)=\dfrac{1}{\theta}\exp\left(-\dfrac{\pi t^2}{\theta^2}\right)$

Le filtre n'est pas causal car $h(t)\neq 0$ pour $t<0$

D'autre part $\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)dt=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{\pi t^2}{\theta^2}\right)dt=1<+\infty$ donc le filtre est stable.

2 - $H(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)\exp(2i\pi ft)dt=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{\pi t^2}{\theta^2}-2i\pi ft\right)dt=\exp\left(-\pi f^2\theta^2\right)$

A l'entrée du filtre le signal est $e(t)=x(t)+b(t)$

où $x(t)=A\cos(2\pi f_0 t)$ représente la partie utile et $b(t)$ le bruit

(remarquons que $x(t)$ est déterministe alors que $b(t)$ est aléatoire).

Désignons par $s(t)$ le signal de sortie correspondant : $s(t) = e(t) * h(t)$

$s(t) = [x(t) + b(t)] * h(t) = x(t) * h(t) + b(t)* h(t)$

$s(t) = y(t) + b'(t)$

et calculons les puissances respectives de la partie utile $y(t) = x(t) * h(t)$ et de la partie bruit $b'(t) = b(t) * h(t)$.

$\mathrm{P}_y=\int_{-\infty}^{+\infty}S_{yy}(f)df$

$S_{yy}(f)=S_{xx}(f)\left|H(f)\right|^2$

$S_{xx}(f)=\dfrac{A^2}{4}\left\{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right\}$

donc

$S_{yy}(f)=\dfrac{A^2}{4}\exp\left(-2\pi f^2\theta^2\right)\left\{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right\}$

$S_{yy}(f)=\dfrac{A^2}{4}\exp\left(-2\pi f_0{}^2\theta^2\right)\left\{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right\}$

et

$\mathrm{P}_y=\dfrac{A^2}{4}\exp\left(-2\pi f_0{}^2\theta^2\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right\}df$

$\mathrm{P}_y=\dfrac{A^2}{2}\exp\left(-2\pi f_0{}^2\theta^2\right)$

de même $\mathrm{P}_{b'}=\int_{-\infty}^{+\infty}S_{b'b'}(f)df$

soit $\mathrm{P}_{b'}=\dfrac{\mathrm{N}_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-2\pi f^2\theta^2\right)df=\dfrac{\mathrm{N}_0}{2}\dfrac{1}{\theta\sqrt{2}}$

3 - Le rapport signal sur bruit est $\frac{S}{B} = \frac{P_y}{P_{b'}} = \frac{A^2\theta\sqrt{2}}{N_0}\exp\left(-2\pi f_0{}^2\theta^2\right)$

Ce rapport est meilleur en BF qu'en HF.

Exercice VI.5

1 - En désignant par $b'(t)$ le bruit en sortie du filtre $b'(t) = b(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)b(t-\tau)d\tau$

$b(t)$ est supposé stationnaire au 2ème ordre donc $E[b(t-\tau)] = E[b(t)] = M$

et $E\left[b'(t)\right] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)b(t-\tau)\,d\tau\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)E\left[b(t-\tau)\right]d\tau = M\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,d\tau$

or $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,d\tau = H(0) = 1$

donc $E\left[b'(t)\right] = M$

2 - Le signal d'excitation $b(t)$ est maintenant supposé centré, de fonction d'autocorrélation $R_{bb}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$, donc de DSP $S_{bb}(f) = \frac{N_0}{2}$. On cherche $R_{b'b'}(\tau)$ la fonction d'autocorrélation du signal de sortie correspondant $b'(t)$.

$$R_{b'b'}(\tau) = TF^{-1}\left[S_{b'b'}(f)\right] = TF^{-1}\left[\left|H(f)\right|^2\frac{N_0}{2}\right] = \frac{N_0}{2}TF^{-1}\left[\Lambda_{2B}(f)\right]$$

$$R_{b'b'}(\tau) = \frac{N_0}{2}\frac{\sin^2(\pi B\tau)}{\pi^2 B\tau^2} = \frac{N_0 B}{2}\mathrm{sinc}^2(\pi B\tau)$$

La puissance $P_{b'}$ du bruit de sortie est $P_{b'} = R_{b'b'}(0) = \frac{N_0 B}{2}$.

3 -

$$P_{b'} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{b'b'}(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|H(f)\right|^2 S_{bb}(f)df$$

$$P_{b'} = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\Lambda_{2B}(f)df = \frac{N_0 B}{2}$$

Exercice VI.6 Filtre adapté

1 - Le signal $x(t)$ est déterministe de même donc que $y(t)$.

Donc $E\left[\left|y(T)\right|^2\right] = \left|y(T)\right|^2 = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)x(T-t)dt\right|^2$

donc, d'après l'inégalité de Schwartz :

$$E\left[\left|y(T)\right|^2\right] \leq \int_{-\infty}^{+\infty}\left|h(t)\right|^2 dt\;\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x(T-t)\right|^2 dt}_{\text{énergie de } x(t) = E_x}$$

La puissance du bruit filtré $b'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{b'b'}(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{N_0}{2}\left|H(f)\right|^2 df = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|h(t)\right|^2 dt$

d'où $\rho \leq \dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|^2 dt\ E_x}{\dfrac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|^2 dt} = \dfrac{2E_x}{N_0}$

La majoration obtenue est indépendante de $h(t)$ et la valeur maximum de ρ est obtenue pour $h(t) = \lambda\, x(T\text{-}t)$

2 - Dans le cas particulier où $x(t) = \Pi_T\left(t - \dfrac{T}{2}\right)$le filtre optimal est:

$$h(t) = \lambda\ x\left(t - \frac{T}{2}\right) = \lambda\ \Pi_T\left(T - t - \frac{T}{2}\right) = \lambda\ \Pi_T\left(\frac{T}{2} - t\right) = \lambda\ \Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

Ce filtre est causal et stable donc réalisable.

Exercice VI.7

I 1 - $h(t) = \dfrac{2}{\tau}\operatorname{sinc}\left(\dfrac{2\pi}{\tau}(t - \mathrm{T})\right)$

pour tout t $\quad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du$

en particulier en T $\quad y(\mathrm{T}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(\mathrm{T}-u)du$

soit $\quad y(\mathrm{T}) = \dfrac{2\mathrm{V}}{\tau}\displaystyle\int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}}\operatorname{sinc}\left(\dfrac{2\pi}{\tau}(\mathrm{T} - u - T)\right)du = \dfrac{2\mathrm{V}}{\tau}\displaystyle\int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}}\operatorname{sinc}\left(\dfrac{2\pi u}{\tau}\right)du$

soit en posant $v = \dfrac{2\pi u}{\tau}$

$$y(\mathrm{T}) = \frac{2\mathrm{V}}{\tau}\frac{\tau}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\operatorname{sinc}\ (v)dv$$

$$\boxed{y(\mathrm{T}) = \frac{2\mathrm{V}}{\pi}\cdot 1{,}852}$$

2 - $S_{b'b'}(f) = \dfrac{N_0}{2}\prod_{\frac{2}{\tau}}(f)$ $\qquad$ donc $\qquad \boxed{\sigma'^2 = \dfrac{N_0}{\tau}}$

3 -

$$\mathrm{P}[\text{non détection}] = \mathrm{P}\left[s(t) < \frac{1}{2} y(t) \Big/ y(t) = \frac{2\mathrm{V}}{\pi} \cdot 1{,}852 \right]$$

$$= \mathrm{P}\left[y(t) + b'(t) < \frac{1}{2} y(t) \Big/ y(t) = \frac{2\mathrm{V}}{\pi} \cdot 1{,}852 \right]$$

$$= \mathrm{P}\left[b'(t) < -\frac{1}{2} y(t) \Big/ y(t) = \frac{2\mathrm{V}}{\pi} \cdot 1{,}852 \right]$$

$$= \mathrm{P}\left[b'(t) < -\frac{\mathrm{V}}{\pi} \cdot 1{,}852 \right]$$

$$= \mathrm{P}\left[\mathrm{N}(0, \sigma') < -\frac{\mathrm{V}}{\pi} \cdot 1{,}852 \right]$$

$$= \mathrm{P}\left[\mathrm{N}(0,1) < -\frac{\mathrm{V}}{\pi \sigma'} \cdot 1{,}852 \right]$$

$$= \mathrm{P}\left[\mathrm{N}(0,1) < -1{,}852 \right]$$

soit P[non détection] = 0,032

II 1 -

$$z(t) = x(t) * h_a(t) = \mathrm{V}^2 \prod_\tau(t) * \prod_\tau(t) * \delta(t - \mathrm{T})$$

$$= \mathrm{V}^2 \tau \Lambda_{2\tau}(t) * \delta(t - \mathrm{T})$$

d'où $\boxed{z(\mathrm{T}) = \mathrm{V}^2 \tau}$

2 - $S_{b''b''}(f) = \frac{\mathrm{N}_0}{2} \mathrm{V}^2 \tau^2 \mathrm{sinc}^2(\pi f \tau)$ d'où

$$\sigma''^2 = \frac{\mathrm{N}_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{V}^2 \, \tau^2 \, \mathrm{sinc}^2(\pi f \tau) df$$

soit, en utilisant le théorème de Parseval

$$\sigma''^2 = \frac{\mathrm{N}_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{V}^2 \prod_\tau{}^2(t) dt$$

$$\boxed{\sigma''^2 = \frac{\mathrm{N}_0}{2} \mathrm{V}^2 \, \tau}$$

3 -

$$\mathrm{P}[\text{non détection}] = \mathrm{P}\left[s(t) < \frac{1}{2} z(t) \Big/ z(t) = \mathrm{V}^2 \tau \right]$$

$$= \mathrm{P}\left[z(t) + b''(t) < \frac{1}{2} z(t) \Big/ z(t) = \mathrm{V}^2 \tau \right]$$

$$= \mathrm{P}\left[b''(t) < -\frac{1}{2} z(t) \Big/ z(t) = \mathrm{V}^2 \tau \right]$$

$$= \mathrm{P}\left[b''(t) < -\frac{\mathrm{V}^2 \tau}{2} \right]$$

$$= \mathrm{P}\left[\mathrm{N}(0, \sigma'') < -\frac{\mathrm{V}^2 \tau}{2} \right]$$

$$= \mathrm{P}\left[\mathrm{N}(0,1) < -\frac{\mathrm{V}^2 \tau}{2\sigma''} \right]$$

$$= \mathrm{P}\left[\mathrm{N}(0,1) < -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right]$$

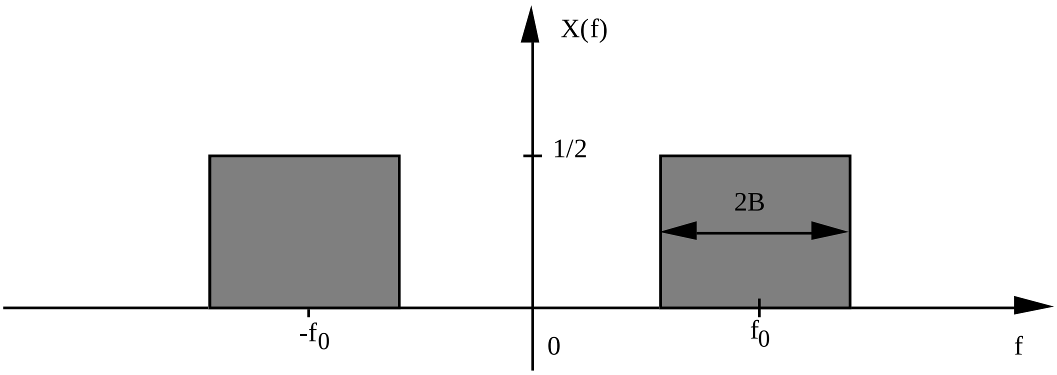
soit P[non détection] = 0,0132

Exercice VIII.1

1 -

$$x(t) = 2B\cos(2\pi f_0 t)\operatorname{sinc}(2\pi Bt)$$

$$X(f) = \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right] * \Pi_{2B}(f) = \frac{1}{2}\left[\Pi_{2B}(f - f_0) + \Pi_{2B}(f + f_0)\right]$$



Les fréquences minimales et maximales de ce signal valent respectivement :

$f_m = f_0 - B$ et $f_M = f_0 + B$

Suivant la valeur de la bande de fréquence occupée ($f_M - f_m$) et sa position ce signal sera considéré comme un signal "à bande relativement large" ou, au contraire comme un signal "à bande relativement étroite".

a) si $\dfrac{f_M - f_m}{f_m} > 1$ soit si $\dfrac{2B}{f_0 - B} > 1 \Rightarrow B > \dfrac{f_0}{3}$

le signal est "à bande relativement large" et la fréquence d'échantillonnage minimale est

$f_e = 2f_M = 2(f_0 + B)$ (fréquence de Shannon)

b) si $\dfrac{f_M - f_m}{f_m} < 1$ soit si $B < \dfrac{f_0}{3}$

le signal est "à bande relativement étroite" et on peut alors enviager des fréquences d'échantillonnage plus petites que la fréquence de Shannon.

Ces fréquences doivent être telles que :

$$\frac{2}{n+1} f_M < f_e < \frac{2}{n} f_m \quad \text{avec} \quad n \in \mathrm{IN} \ \text{ et } \ n < \frac{f_m}{f_M - f_m}$$

2 - $B = \frac{1}{6} f_0$ et $f_e = \frac{4}{3} f_0$: le signal est "à spectre à bande étroite".

$f_m = \frac{5}{6} f_0$ et $f_M = \frac{7}{6} f_0$

On doit avoir $n < \dfrac{\frac{5 f_0}{6}}{\frac{7 f_0}{6} - \frac{5 f_0}{6}} = \dfrac{5}{2}$ ce qui nous offre 3 choix possibles pour n :

a) <u>$n = 0$</u>

$f_e > 2 f_M$ on retrouve la condition de Shannon.

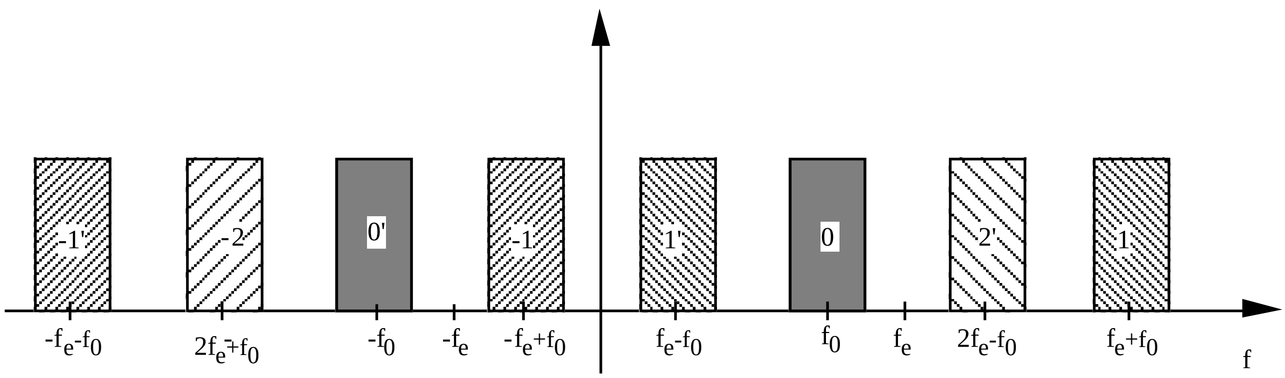
b) <u>$n = 1$</u>

$f_M < f_e < 2 f_m$ soit $\dfrac{7 f_0}{6} < f_e < \dfrac{10 f_0}{6}$

c) <u>$n = 2$</u>

$\dfrac{2}{3} f_M < f_e < f_m$ soit $\dfrac{7 f_0}{9} < f_e < \dfrac{5 f_0}{6}$

Le choix que l'on a fait ($f_e = \frac{4}{3} f_0$) correspond à la possibilité b) c'est à dire n = 1.



Pour restituer le signal $x(t)$, on utilisera un filtre passe-bande idéal centré sur f_0 et de largeur 2B de façon à ne conserver que l'ordre 0.

Exercice VIII.2

$[f_m - f_M] = [8\text{ kHz}, 10\text{ kHz}]$

$f_M - f_m = 2$ kHz << 8 kHz il s'agit donc d'un signal "bande étroite".

On peut donc échantillonner ce signal à une fréquence f_e telle que :

$$\frac{2}{n+1} f_M < f_e < \frac{2}{n} f_m \quad \text{avec} \quad n \in \mathrm{IN} \ \text{ et } \ n < \frac{f_m}{f_M - f_m}$$

Ici $\dfrac{f_m}{f_M - f_m} = 4$

n = 0	$f_e > 2f_M$	$f_e > 20$ kHz (condition de Shannon)
n = 1	$f_M < f_e < 2f_m$	10 kHz < f_e < 16 khz
n = 2	$\frac{2}{3} f_M < f_e < f_m$	6,66 kHz < f_e < 8 khz
n = 3	$\frac{1}{2} f_M < f_e < \frac{2}{3} f_m$	5 kHz < f_e < 5,33 khz

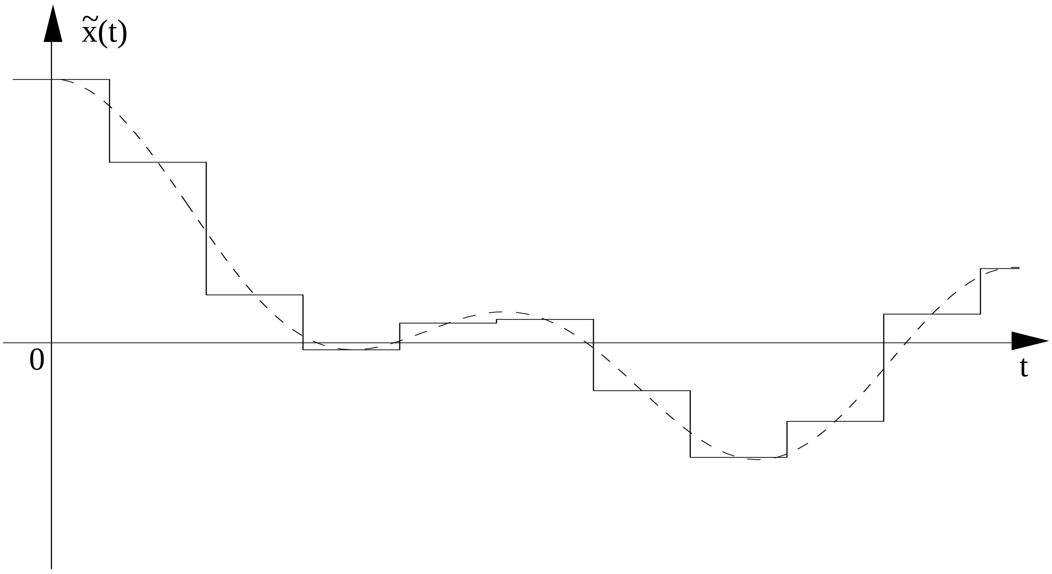
Exercice VIII.3

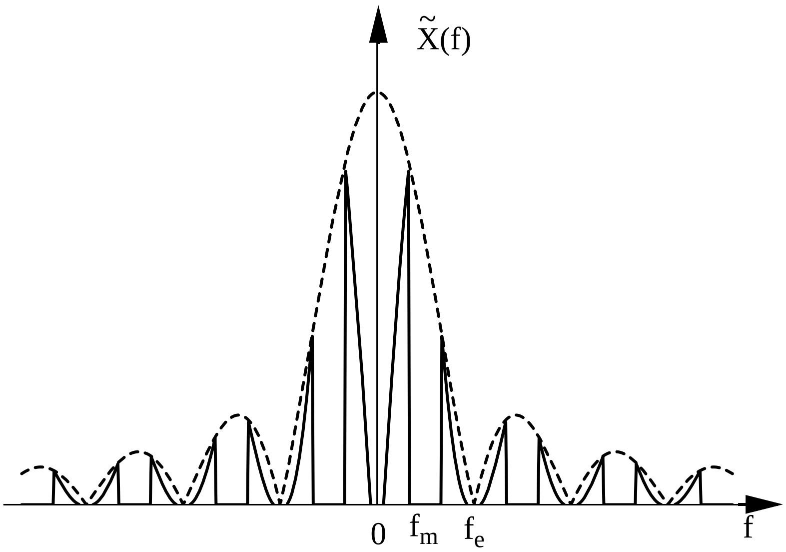
1 - $\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\mathrm{T_e}) \prod_{\mathrm{T_e}}(t - k\mathrm{T_e}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\mathrm{T_e}) \prod_{\mathrm{T_e}}(t) * \delta(t - k\mathrm{T_e})$

$$\tilde{x}(t) = \prod_{\mathrm{T_e}}(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\mathrm{T_e})\,\delta(t - k\mathrm{T_e}) = \prod_{\mathrm{T_e}}(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t - k\mathrm{T_e})$$

$$\tilde{x}(t) = \prod_{\mathrm{T_e}}(t) * \left[x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k\mathrm{T_e}) \right] = \prod_{\mathrm{T_e}}(t) * \left[x(t)\,\mathrm{CC}_{\mathrm{T_e}}(t) \right]$$

d'où $\tilde{X}(f) = \mathrm{T_e}\,\mathrm{sinc}(\pi f \mathrm{T_e}) \left[X(f) * \frac{1}{\mathrm{T_e}} \mathrm{CC}_{\mathrm{f_e}}(f) \right] = \mathrm{sinc}(\pi f \mathrm{T_e}) \left[X(f) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k\mathrm{f_e}) \right]$





2 - Le filtre passe-bas de restitution a pour effet de sélectionner uniquement l'ordre zéro de périodisation.

Donc $X_0(f) = X(f)\mathrm{sinc}(\pi f \mathrm{T_e})$ (il s'agit du terme de $\tilde{X}(f)$ correspondant à k=0)

on en déduit $x_0(t) = \mathrm{TF}^{-1}\left[X_0(f)\right](t) = x(t) * \dfrac{1}{\mathrm{T_e}} \prod_{\mathrm{T_e}}(t)$

3 - $e(t) = x(t) - x_0(t) = x(t) - x(t) * \dfrac{1}{\mathrm{T_e}} \prod_{\mathrm{T_e}}(t) = x(t) * \left[\delta(t) - \dfrac{1}{\mathrm{T_e}} \prod_{\mathrm{T_e}}(t)\right]$

On peut donc interpréter e(t) comme étant le filtré de x(t) par un filtre LIT de réponse impulsionnelle $h(t) = \delta(t) - \frac{1}{\mathrm{T_e}} \prod_{\mathrm{T_e}}(t)$ donc de fonction de transfert $H(f) = 1 - \mathrm{sinc}(\pi f \mathrm{T_e})$.

4 - $S_{ee}(f) = S_{xx}(f)|H(f)|^2 = S_{xx}(f)\left[1 - 2\,\mathrm{sinc}(\pi f \mathrm{T_e}) + \mathrm{sinc}^2(\pi f \mathrm{T_e})\right]$

5 - Si $x(t) = A\cos(2\pi \mathrm{f_M t})$ $\quad S_{xx}(f) = \frac{A^2}{4}\left[\delta(f - \mathrm{f_M}) + \delta(f + \mathrm{f_M})\right]$

d'où $\quad S_{ee}(f) = \frac{A^2}{4}\left[\delta(f - \mathrm{f_M}) + \delta(f + \mathrm{f_M})\right]\left[1 - 2\,\mathrm{sinc}(\pi f \mathrm{T_e}) + \mathrm{sinc}^2(\pi f \mathrm{T_e})\right]$

Soit $\quad S_{ee}(f) = \frac{A^2}{4}\left[\delta(f - \mathrm{f_M}) + \delta(f + \mathrm{f_M})\right]\left[1 - 2\,\mathrm{sinc}(\pi \mathrm{f_M T_e}) + \mathrm{sinc}^2(\pi \mathrm{f_M T_e})\right]$

On en déduit :

$P_e = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ee}(f)df = \frac{A^2}{2}\left[1 - 2\,\mathrm{sinc}(\pi \mathrm{f_M T_e}) + \mathrm{sinc}^2(\pi \mathrm{f_M T_e})\right]$

Exercice XI.1

Il faut chercher les transformés en z inverses de $X(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$. Pour cela nous pouvons utiliser plusieurs méthodes.

A Inversion utilisant la formule des résidus (cf Annexes)
- On détermine tout d'abord les valeurs de k pour lesquelles $X(z)z^{k-1}$ n'admet **pas** 0 pour pôle : ici c'est pour k ≥ 0.
- On détermine les différents disques de convergence de $X(z)$.

A chaque disque correspondra un développement en série de Laurent de $X(z)$ et donc un signal antécédent $x(k)$ de $X(z)$.

Ici les seuls pôles non nuls sont : 1 (ordre de multiplicité 1) et 2 (ordre de multiplicité 2).

Il y a donc 3 disques de convergence possibles : $D_1=\{0<|z|<1\}$ $D_2=\{1<|z|<2\}$ et $D_3=\{2<|z|\}$.

Recherchons $x(k)$ sur chacun de ces 3 domaines :

1 . Sur $D_1=\{0<|z|<1\}$

1.1 Pour k ≥ 0

0 n'est pas pôle de $X(z)z^{k-1}$ et l'application de la formule [A2] nous donne $x(k)=0$.

1.2 Pour k <0

0 est pôle, de plus $\left|X(z)z^k\right|=\left|\dfrac{z^{k+1}}{(z-1)(z-2)^2}\right|\xrightarrow[|z|\to+\infty]{}0$, on peut donc appliquer [A3] ce qui nous conduit à évaluer les résidus de $X(z)z^{k-1}$ en z=1 et z=2.

1 étant pôle simple :

$$\mathrm{Res}\left(X(z)z^{k-1},1\right)=\left[\frac{z^k}{\dfrac{d(z-1)(z-2)^2}{dz}}\right]_{z=1}=1$$

2 étant pôle double :

$$\mathrm{Res}\left(X(z)z^{k-1},2\right)=\frac{1}{(2-1)!}\left[\frac{d^{(2-1)}(z-2)^2X(z)z^{k-1}}{dz^{(2-1)}}\right]_{z=2}=\ldots=2^{k-1}(k-2)$$

donc $x(k)=2^{k-1}(2-k)-1$ pour $k<0$.

En résumé :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{sur } D_1=\{0<|z|<1\} \qquad x(k)=\begin{cases}2^{k-1}(2-k)-1 & si\ k<0\\ 0 & si\ k\geq 0\end{cases}\\ x(k) \text{ est anti-causal}\end{array}}$$

On montrerait de façon analogue que :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{sur } D_2 = \{1 < |z| < 2\} \qquad x(k) = \begin{cases} 2^{k-1}(2-k) & si\ k < 0 \\ 1 & si\ k \geq 0 \end{cases} \\ x(k) \text{ n' est ni causal, ni anti-causal} \end{array}}$$

et que

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{sur } D_3 = \{2 < |z|\} \qquad x(k) = \begin{cases} 0 & si\ k < 0 \\ 1 + 2^{k-1}(k-2) & si\ k \geq 0 \end{cases} \\ x(k) \text{ est causal.} \end{array}}$$

B Inversion par décomposition en éléments simples

1 . $X(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2} = \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{2}{(z-2)^2} - \dfrac{1}{z-2}$

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = -\sum_{k=-\infty}^{0} z^{-k} \qquad \text{sur } |z| < 1$$

$$-\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} z^k = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{0} 2^k z^{-k} \qquad \text{sur } |z| < 2$$

$$\frac{2}{(z-2)^2} = -\frac{d}{dz}\left[\frac{2}{z-2}\right] = \sum_{k=-\infty}^{0} (1-k)2^{k-1} z^{-k} \qquad \text{sur } |z| < 2$$

En résumé, sur le domaine $|z| < 1$:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{0} z^{-k}\left(2^{k-1}(2-k) - 1\right)$$

sur ce domaine, $X(z)$ est donc la TZ de : $\boxed{x(k) = \begin{cases} 2^{k-1}(2-k) - 1 & si\ k < 0 \\ 0 & si\ k \geq 0 \end{cases}}$

Cherchons $x(k)$ sur les autres domaines.

2 . $X(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2} = \dfrac{z^{-2}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-2z^{-2}\right)^2}$

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{2\left(1-2z^{-1}\right)^2} - \frac{3}{2\left(1-2z^{-1}\right)}$$

$$\frac{1}{1-z^{-1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} \qquad \text{sur } |z| > 1$$

$$-\frac{3}{2\left(1-2z^{-1}\right)} = -\frac{3}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k z^{-k} \qquad \text{sur } |z| > 2$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-2z^{-1}\right)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)2^{k-1} z^{-k} \qquad \text{sur } |z| > 2$$

En résumé, sur le domaine $|z| > 2$:

$$X(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k}\left(2^{k-1}(k-2)+1\right)$$

et sur ce domaine $X(z)$ est donc la TZ de : $\boxed{x(k)=\begin{cases}0 & si\ k<0\\ 2^{k-1}(k-2)+1 & si\ k\geq 0\end{cases}}$

3 . Etudions le problème sur le domaine $1<|z|<2$

$$X(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}=\frac{1}{z-1}+\frac{2}{(z-2)^2}-\frac{1}{z-2}=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}+\frac{2}{(z-2)^2}-\frac{1}{z-2}$$

$$\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}=z^{-1}\sum_{k=0}^{+\infty}z^{-k}=\sum_{k=1}^{+\infty}z^{-k} \qquad \text{sur } |z|>1$$

Donc sur le disque $1<|z|<2$:

$$X(z)=\sum_{k=-\infty}^{0} z^{-k}\left(2^{k-1}(2-k)\right)+\sum_{k=1}^{+\infty}z^{-k}$$

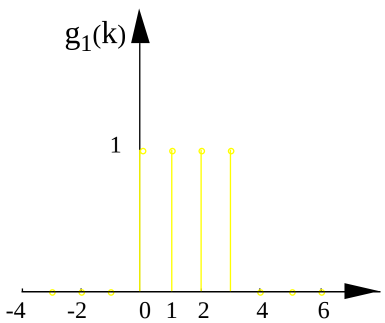
et sur ce domaine $X(z)$ est donc la TZ de : $\boxed{x(k)=\begin{cases}2^{k-1}(2-k) & si\ k\leq 0\\ 1 & si\ k>0\end{cases}}$

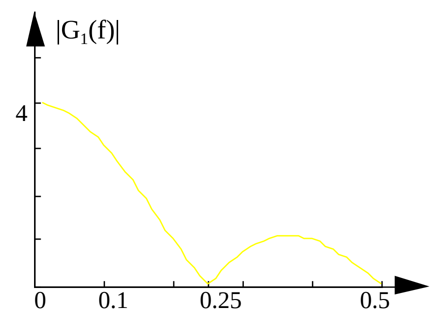
Exercice XI.2

1. Fonction porte de largeur N

$$g_1(k)=\prod\nolimits_N(k) \qquad \text{i.e. } g_1(k)=\begin{cases}1 & \forall k\in\{0,N-1\}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

$$G_1(f)=\frac{\sin \pi Nf}{\sin \pi f}e^{-i\pi(N-1)f}$$





2. Fonction triangle de largeur N+2

$$g_2(k)=\begin{cases}1-\dfrac{2|k|}{N+1} & \forall k,\ \ |k|\leq\dfrac{N+1}{2}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Posons $c(k)=\Pi_{2P+1}(k+P)*\Pi_{2P+1}(k+P)$

$$c(k) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Pi_{2P+1}(j+P) * \Pi_{2P+1}(k-j+P)$$

Or $\Pi_{2P+1}(j+P) = 1 \Leftrightarrow 0 \le j+P \le 2P \Leftrightarrow -P \le j \le P$

$$C(k) = \sum_{j=-P}^{+P} \Pi_{2P+1}(k-j+P)$$

Effectuons le changement d'indice $l = k - j + P$.

$$C(k) = \sum_{l=k+2P}^{k} \Pi_{2P+1}(l) = \sum_{l=k}^{k+2P} \Pi_{2P+1}(l)$$

- Si k + 2P < 0 i.e. k < -2P   C(k) = 0

- Si $0 \le k + 2P \le 2P \quad i.e. -2P \le k \le 0$ alors C(k) = k + 2P + 1.

- Si $0 \le k \le 2P$ alors C(k) = 2P - k + 1.

- Si k > 2P alors C(k) = O.

Soit finalement :

Pour $|k| \le \frac{N+1}{2}$ on a $g_2(k) = 1 - \frac{2|k|}{N+1}$

Soit pour N = 4P+1 :

$|k| \le 2P+1$ on a $g_2(k) = 1 - \frac{2|k|}{4P+2} = 1 - \frac{|k|}{2P+1}$

$\rightarrow (2P+1)\, g_2(k) = 2P + 1 - |k| = C(k)$

Donc $g_2(k) = \frac{1}{2P+1} C(k)$

Soit $G_2(f) = \frac{1}{2P+1} TF\{C(k)\}$

$$TF\{C(k)\} = TF\{\Pi_{2P+1}(k+P) * \Pi_{2P+1}(k+P)\}$$

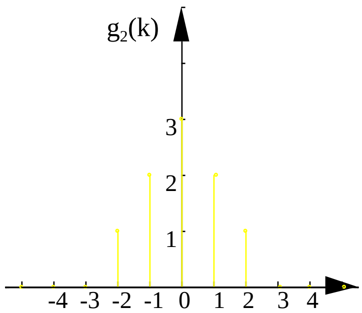
$$TF\{C(k)\} = \left(TF\{\Pi_{2P+1}(k+P)\}\right)^2$$

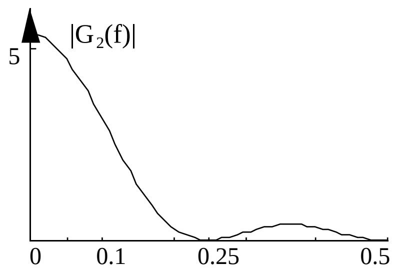
Or $TF\{\Pi_{2P+1}(k+P)\} = e^{2i\Pi fP}\ TF\{\Pi_{2P+1}(k)\}$

$$TF\{\Pi_{2P+1}(k+P)\} = e^{2i\Pi fP}\ e^{-i\Pi(N-1)f}\ \frac{\sin \Pi\ Nf}{\sin \Pi f} = e^{i\Pi[2P-N+1]}\ \frac{\sin \Pi\ Nf}{\sin \Pi f}$$

$$\Rightarrow |G_2(f)| = \frac{1}{2P+1}\left(\frac{\sin \Pi\ Nf}{\sin \Pi\ f}\right)^2$$

Pour N = 5 = 4 . 1 (P = 1)





3 - Fenêtre de Hamming

$$g_3(k) = \begin{cases} a + (1-a)\cos\dfrac{2\Pi k}{N} & |k| \le \dfrac{N-1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$N = 2P+1 \quad |k| \le P$$

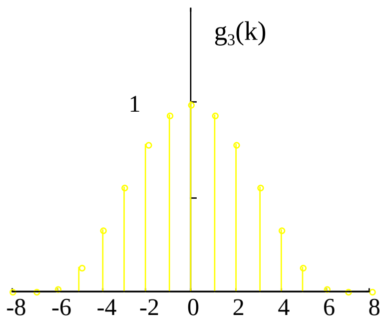
$$g_3(k) = \left[a + \frac{(1-a)}{2}\left(e^{\frac{i2\Pi k}{N}} + e^{\frac{-i2\Pi k}{N}}\right)\right]\Pi_{2P+1}(k+P)$$

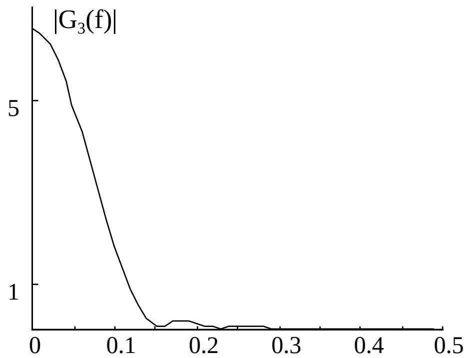
$$G_3(f) = a\ e^{2i\Pi fP}\ G_1(f) + \frac{1-a}{2}\left[G_1(f)\ e^{2i\Pi fP}\right]_{f-\frac{1}{N}} + \frac{1-a}{2}\left[G_1(f)\ e^{2i\Pi fP}\right]_{f+\frac{1}{N}}$$

$$= a \underbrace{\underbrace{e^{i\Pi f[2P-(2P)]}}_{1} \frac{\sin \Pi N f}{\sin \Pi f}}_{H_1(f)} + \frac{1-a}{2} \underbrace{\frac{\sin \Pi N\left(f-\frac{1}{N}\right)}{\sin \Pi\left(f-\frac{1}{N}\right)}}_{H_1\left(f-\frac{1}{N}\right)} + \frac{1-a}{2} \underbrace{\frac{\sin \Pi N\left(f+\frac{1}{N}\right)}{\sin \Pi\left(f+\frac{1}{N}\right)}}_{H_1\left(f+\frac{1}{N}\right)}$$

$$g_3(k) = a + (1-a)\cos\frac{2\Pi k}{2P+1} \qquad |k| \le P$$

Représentation $P = 6 \qquad (N = 13) \qquad a = \frac{1}{2}$





Exercice XI.3

Si on restreint X(f) à $[-B', B']$, on peut périodiser cette restriction en choisissant 2B' pour période. Ainsi, on peut calculer le développement en série de Fourier de X(f) pour $f \in [-B', B']$.

Si $f \in [-B', B'] \qquad X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \, e^{\frac{2i\Pi f k}{2B'}}$

Calcul les cœfficients C_k

$$C_k = \frac{1}{2B'} \int_{-B'}^{B'} X(f)\, e^{\frac{-2i\Pi k f}{2B'}} \, df = \frac{1}{2B'} \int_{-1/2}^{1/2} X(f)\, e^{\frac{-2i\Pi k f}{2B'}} \, df$$

(car $X(f) = 0$ pour $B' < |f| < \frac{1}{2}$)

Si $B \le \frac{1}{4}$ on peut choisir $B' = \frac{1}{4}$ (si le spectre est continu)

$$\to \frac{1}{2B'} = 2$$

De même si $B \le \frac{1}{2\cdot 3}$ $\qquad B' = \frac{1}{6}$ $\qquad \Rightarrow \frac{1}{2B'} = 3$

Plus généralement :

Si $B \le \frac{1}{2.P} \quad \Rightarrow \quad B' = \frac{1}{2P} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2B'} = P$

$P \ge 2$

Sous cette hypothèse $\left(B' = \frac{1}{2P}\right)$, le cœfficient C_k peut s'exprimer simplement à partir du signal à temps discret. En effet :

$$C_k = P \int_{-1/2}^{1/2} X(f)\, e^{-2i\Pi kPf}\, df$$

$C_k = P \,.\left\{\text{le coefficient de Fourier au développement de } X(f)\right\} = P \,.\, x(-kP)$

Car $X(f) = \sum_k x(k)\, e^{-2i\Pi Pk} = \sum_k x(-k)\, e^{2i\Pi Pk}$

Donc $\quad C_k = P\, x(-kP)$

Soit $\quad X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P\, x(-kP)\, e^{2i\Pi kPf} \quad sur\, [-B', B']$

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P\, x(kP)\, e^{-2i\Pi kPf} \quad \text{sur} \left[-\frac{1}{2P}, \frac{1}{2P}\right]$$

or $\quad x(-k) = \frac{1}{1} \int_{-1/2}^{1/2} X(f)\, e^{-2i\Pi kf}\, df \quad \Rightarrow \quad x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(f)\, e^{2i\Pi kf}\, df$

Et l'expression précédente de X(f) n'étant valable que sur $\left[-\frac{1}{2P}, \frac{1}{2P}\right]$ $\left(pour\ \frac{1}{2P} < |f| \le \frac{1}{2} \quad X(f) = 0\right)$, on déduit :

$$x(k) = \int_{-\frac{1}{2P}}^{\frac{1}{2P}} \underbrace{\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} P\, x(\ell P)\, e^{2i\Pi \ell P f}}_{X(f)}\; e^{2i\Pi kf}\, df$$

$$x(k) = P \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} x(\ell P) \int_{-\frac{1}{2P}}^{\frac{1}{2P}} e^{2i\Pi f(k-\ell P)}\, df$$

$$x(k) = P \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(lP)\, \frac{1}{2i\Pi\,(k-lP)} \left(e^{i\Pi\left(\frac{k-lP}{P}\right)} - e^{-i\Pi\left(\frac{k-lP}{P}\right)} \right)$$

$$x(k) = P \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(lP)\, \frac{\sin \Pi\left(\frac{k-lP}{P}\right)}{\Pi\left(\frac{k-lP}{P}\right)} = P \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(lP)\, \mathrm{sinc}\, \Pi\left(\frac{k-lP}{P}\right)$$

On peut donc retrouver x(k) à partir du sous-échantillon x(kP).

Valeur maximale de P :

P <-> plus grand entier tel que $B \leq \frac{1}{2P}$

P = plus grand entier/ $\frac{1}{2P} \geq P$ donc la partie entière de $\frac{1}{2B}$

2. Interprétation

Si on considère que x(k) correspond à une suite d'échantillon de x(t) (signal analogique) à la fréquence d'échantillonnage fe, on sait qu'alors la transformée de Fourier de x(k) correspond (à un facteur près) à la périodisation de la transformée de Fourier de x(t) (autour de fe). Cette périodisation correspond au spectre du signal échantillonné. De plus, si la fréquence d'échantillonnage fe vérifie $\mathrm{fe} \geq 2\, \mathrm{f}_{\mathrm{MAX}}$ où $\mathrm{f}_{\mathrm{MAX}}$ est la borne supérieure du support de $\mathrm{X}_{\mathrm{TC}}(\mathrm{f})$, alors il n'y a pas recouvrement des spectres de différents ordres.

Sous ces hypothèses (absence de recouvrement), la partie de X(f) située autour de 0 correspond à l'ordre 0 (spectre du signal à continu).

La configuration décrite au 1 signifie :

$\mathrm{f}_{\mathrm{MAX}} \leq \frac{\mathrm{fe}}{4}$ i.e. $\mathrm{fe} \geq 4\, \mathrm{f}_{\mathrm{MAX}}$

(en prenant P = 2).

Une fréquence d'échantillonnage de 2 $\mathrm{f}_{\mathrm{MAX}}$ aurait été suffisante pour reconstituer le signal analogique x(t) d'origine. C'est ce qui explique que la moitié des échantillons effectivement prélevés était nécessaire.

Exercice X.1

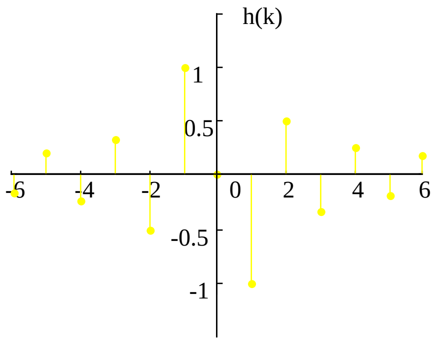
D'après le théorème de Shannon, il faut $f_e > 2B$.

$TF\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = 2i\pi f\, X(f)$ donc $H(f) = 2i\pi f$.

Le filtre numérique de fonction de transfert $H(f)=2i\pi f$ a une réponse impulsionnelle $h(k)$ donnée par la TF inverse de $H(f)$:

$$h(k)=\int_{-1/2}^{1/2} 2i\pi f\, e^{2i\pi fk}\,df$$

Soit $h(k)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k}{k} & \text{si } k\neq 0\\ 0 & \text{si } k=0\end{cases}$



Pour approcher $h(k)$par un RIF d'ordre 4, on doit tout d'abord sélectionner 5 valeurs les plus "significatives" de $h(k)$ (ici les valeurs de $h(k)$ pour $|k| \leq 2$) puis translater ces valeurs dans le temps pour que le filtre soit causal (il faut ici décaler les valeurs de 2 unités vers la droite).Ceci nous donne :

$$h'(0)=-\frac{1}{2} \quad h'(1)=1 \quad h'(2)=0 \quad h'(3)=-1 \quad h'(4)=\frac{1}{2} \text{ et } h'(k)=0 \text{ sinon}$$

En prenant une f**enêtre rectangulaire** de longueur 5, la réponse impulsionnelle est en définitive :

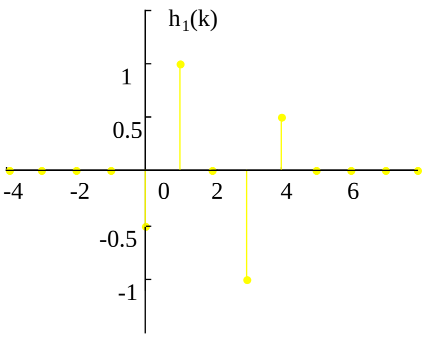
$$h_1(k)=-\frac{1}{2}\delta(k)+\delta(k-1)-\delta(k-3)+\frac{1}{2}\delta(k-4)$$

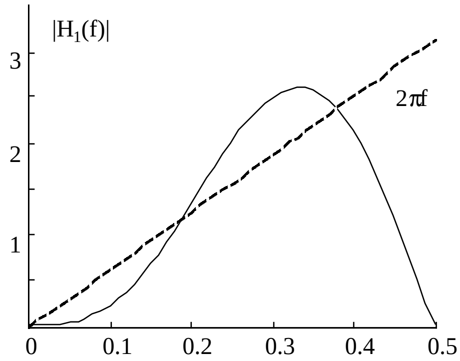
La fonction de transfert en z est donc égale à :

$$H_1(z)=-\frac{1}{2}+z^{-1}-z^{-3}+\frac{1}{2}z^{-4}$$

Soit $H_1(z)=-\dfrac{1}{2}z^{-4}(z-1)^3(z+1)$

On obtient alors la fonction de transfert en f en remplaçant z par $e^{2i\pi f}$ ce qui nous donne en définitive $|H_1(f)|=8\left|\sin^3(\pi f)\right|\left|\cos(\pi f)\right|$



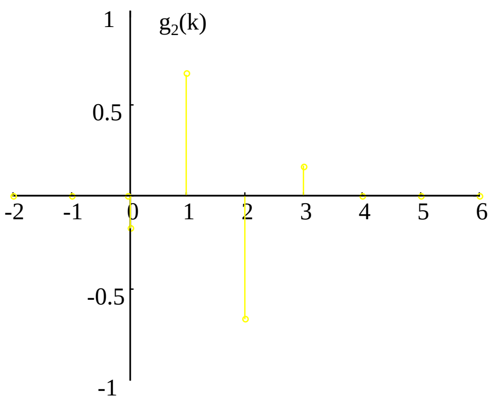


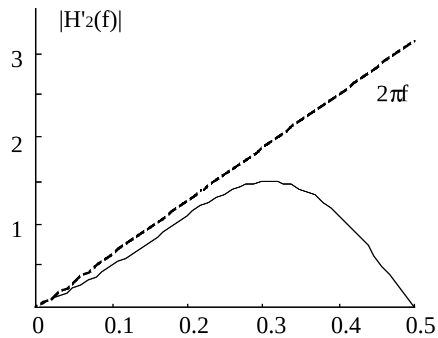
En prenant une **fenêtre triangulaire** comportant 5 valeurs non nulles et centrée sur k = 2, on obtient de façon analogue :

$$h_2(k) = -\frac{1}{6}\delta(k) + \frac{2}{3}\delta(k-1) - \frac{2}{3}\delta(k-3) + \frac{1}{6}\delta(k-4)$$

$$H_2(z) = -\frac{1}{6}z^{-4}(z-1)(z+1)\left(z-2+\sqrt{3}\right)\left(z-2-\sqrt{3}\right)$$

$$\left|H_2(f)\right| = \frac{2}{3}\left|\sin(2\pi f)\right|\left|\cos(2\pi f)-2\right|$$



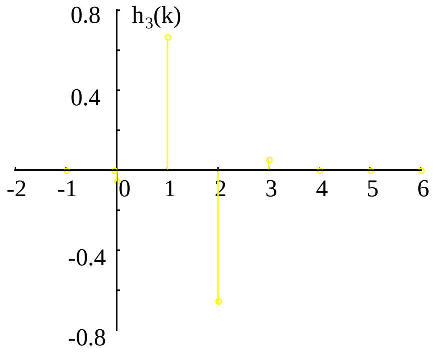


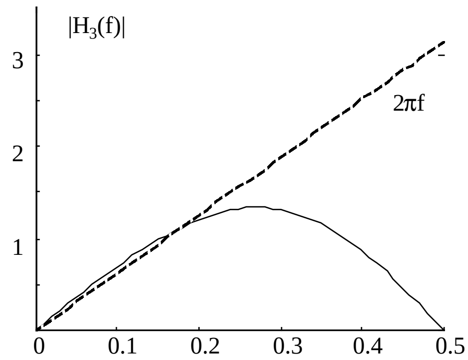
Enfin avec une **fenêtre de Hamming** causale, on obtient :

$$h_2(k) = -\frac{0.0955}{2}\delta(k) + 0.6545\delta(k-1) - 0.6545\delta(k-3) + \frac{0.0955}{2}\delta(k-4)$$

$$H_3(z) = -0.047\, z^{-4}(z-1)(z+1)(z-0.073)(z+13.633)$$

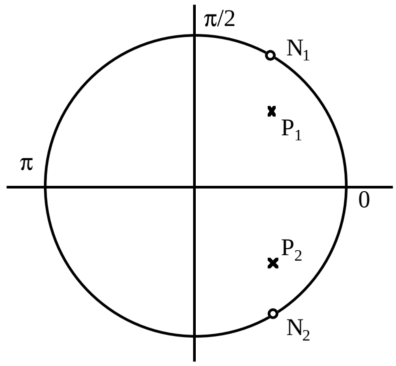
$$\left|H_3(f)\right| = 4(0.047)\left|\cos(\pi f)\sin(\pi f)\right|\left|\cos(2\pi f)-0.073+i\sin(2\pi f)\right|\left|\cos(2\pi f)-13.633+i\sin(2\pi f)\right|$$





Exercice X.2

1. $H(z) = \dfrac{\left(z - N_1\right)\left(z - \overline{N}_1\right)}{\left(z - P_1\right)\left(z - \overline{P}_1\right)}$



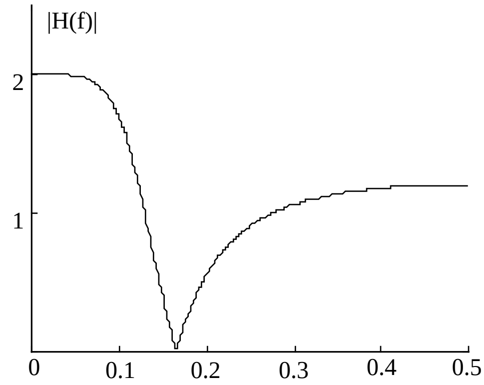
$N_1 = e^{i\frac{\Pi}{3}}$

$P_1 = \dfrac{1}{2}(1+i) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, e^{i\frac{\Pi}{4}}$

Comme le degré du numérateur de H(z) est plus petit ou égal (ici égal) au degré du dénominateur de H(z), on en conclut qu'il existe une réponse h(k) (dont H(z) est la transformée en z) causale à condition de prendre pour H(z) le domaine de convergence $D = \left\{|z| > |P_1|\right\}$.

Sous cette condition (existence de la réponse h(k) causale), on en déduit que le filtre dont la réponse impulsionnelle est h(k) est aussi stable car les pôles $\left(P_1 , \overline{P}_1\right)$ sont situés à l'intérieur du cercle unité.

2. Tracé de $|H(f)|$



On obtient “un maximum” pour $f = \frac{1}{8}$ et un zéro pour $f = \frac{1}{6}$. En fait, le “maximum” est atténué à cause de la proximité du zéro.

3. Calcul de h(k)

On va décomposer H(z) en éléments simples.

$$H(z) = \frac{z^2 - \left(N_1 + \overline{N}_1\right) z + N_1\, \overline{N}_1}{z^2 - \left(P_1 + P_1\right) z + P_1\, \overline{P}_1} = \frac{z^2 - z + 1}{z^2 - z + \frac{1}{2}}$$

Soit $H(z) = 1 + \frac{1}{2}\, \frac{1}{z^2 - z + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\, \frac{1}{\left(z - P_1\right)\left(z - \overline{P}_1\right)}$

$$H(z) = 1 + \frac{1}{2}\left\{\frac{\alpha}{z - P_1} + \frac{\beta}{z - \overline{P}_1}\right\}$$

avec $\beta = \overline{\alpha}$ car le dénominateur est un polynôme à cœfficients réels.

$$\alpha = \left[\frac{1}{z - \overline{P}_1}\right]_{z = P_1} = \frac{1}{P_1 - \overline{P}_1} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{1}{\overline{P}_1 - P_1}$$

$$\frac{\alpha}{z - P_1} = \alpha\, z^{-1}\, \frac{1}{1 - P_1\, z^{-1}} = \alpha\, z^{-1} \sum_{l \geq 0} \left(P_1\right)^{l} z^{-l}$$

$$\frac{\beta}{z - \overline{P}_1} = \beta\, z^{-1}\, \frac{1}{1 - \overline{P}_1\, z^{-1}} = \beta\, z^{-1} \sum_{l \geq 0} \left(\overline{P}_1\right)^{l} z^{-l}$$

$$\underbrace{\frac{\alpha}{z - P_1} + \frac{\beta}{z - \overline{P}_1}}_{= H_1(z)} = \sum_{l \geq 0} \left[\alpha\left(P_1\right)^{l} + \beta\left(\overline{P}_1\right)^{l}\right] z^{-(l+1)}$$

$$= \sum_{k \geq 1} \left(\alpha\left(P_1\right)^{k-1} + \beta\left(\overline{P}_1\right)^{k-1}\right) z^{-k}$$

Or $\alpha = \dfrac{1}{P_1 - \overline{P}_1} = \dfrac{1}{2i\,\Im m\,(P_1)} = \dfrac{1}{2i\,\frac{1}{2}} = -i$

Donc $\beta = +i$

$$(P_1)^{k-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1} e^{i(k-1)\frac{\Pi}{4}} \quad \Rightarrow \quad (\overline{P}_1)^{k-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1} e^{-i(k-1)\frac{\Pi}{4}}$$

$$H_1(z) = \sum_{k\geq 1} -i\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1}\right\}\left\{e^{i(k-1)\frac{\Pi}{4}} - e^{-i(k-1)\frac{\Pi}{4}}\right\} z^{-k}$$

$$H_1(z) = 1 - \sum_{k\geq 1} z^{-k}\, i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1} 2i\sin(k-1)\frac{\Pi}{4} = +2\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1}\sin(k-1)\frac{\Pi}{4}\, z$$

$$\boxed{H(z) = 1 + \sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1}\sin(k-1)\frac{\Pi}{4} z^{-k}}$$

$$h(k) = \delta(k) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1}\sin(k-1)\frac{\Pi}{4}\, u(k-1)$$

On obtient une période sur les valeurs prises par $\sin(k-1)\dfrac{\Pi}{4}$.

Si $\quad k-1 = 8p \iff k = 8p+1 \qquad \sin(k-1)\dfrac{\Pi}{4} = 0$

$k-1 = 8p+1 \iff k = 8p+2 \qquad \sin(k-1)\dfrac{\Pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$k-1 = 8p+2 \iff k = 8p+3 \qquad \sin(k-1)\dfrac{\Pi}{4} = 1$

$k-1 = 8p+3 \iff k = 8p+4 \qquad \sin(k-1)\dfrac{\Pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

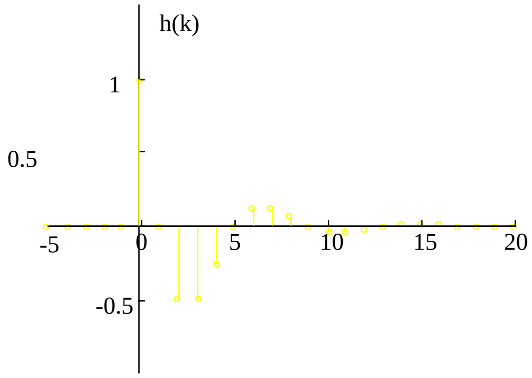
$k-1 = 8p+4 \iff k = 8p+5 \qquad \sin(k-1)\dfrac{\Pi}{4} = 0$

$k-1 = 8p+5 \iff k = 8p+6 \qquad \sin(k-1)\dfrac{\Pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$k-1 = 8p+6 \iff k = 8p+7 \qquad \sin(k-1)\dfrac{\Pi}{4} = -1$

$k-1 = 8p+7 \iff k = 8(p+1) \qquad \sin(k-1)\dfrac{\Pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Cette période de 8 pour $\sin(k-1)\dfrac{\Pi}{4}$ se traduit par une “pseudo-période” sur h(k) de 8.



4. Schéma de réalisation

$$H(z) = \frac{z^2 - z + 1}{z^2 - z + \frac{1}{2}} = \frac{1 - z^2 + z^{-2}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

On en déduit :

$$Y(z) - z^{-1}\, Y(z) + \frac{1}{2} z^{-2}\, Y(z) = X(z) - z^{-1}\, X(z) + z^{-2}\, (X(z))$$

$$\downarrow (T.Z)^{-1} \qquad\qquad \downarrow (T.Z)^{-1}$$

$$y(k) - y(k-1) + \frac{1}{2} y(k-2) = x(k) - x(k-1) + x(k-2)$$